

МЕТОДЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КРЫШЕК КОРЕННОГО ОПОРНОГО УЗЛА ДВИГАТЕЛЯ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ

Митрошкин М.С. – аспирант, Попович В.С. – д.т.н., профессор
Алтайский государственный технический университет (г. Барнаул)

Коренной узел является наиболее нагруженной частью двигателя внутреннего сгорания. Кроме того, конфигурация деталей коренного узла является достаточно сложной, а динамически изменяющиеся нагрузки имеют крайне нелинейный характер, поэтому экспериментальное исследование деталей коренного узла двигателя внутреннего сгорания является наиболее важным в оценке прочности, как самого узла, так и двигателя в целом. Экспериментальные исследования позволяют уточнить и дополнить методы теоретического анализа, учесть влияние отдельных факторов на напряженно-деформированное состояние двигателя, подтвердить правильность выбранной теоретической методики исследования напряженно-деформированного состояния двигателя.

Для деталей коренного узла двигателей 4Ч13/14 и 6Ч16/14 экспериментально выполнено:

- определение упругих характеристик крышек коренных подшипников
- определение деформаций в выбранных сечениях крышек коренных подшипников при различных статических нагрузках
- исследование различных факторов, влияющих на напряженно-деформированное состояние двигателя (величины зазоров в деталях, усилие затяжки, износ)
- выявление наиболее опасных режимов работы двигателя, исходя из напряженно-деформированного состояния детали
- исследование влияния различных режимов работы двигателя на напряженно-деформированное состояние.

Экспериментальные исследования коренного узла двигателя внутреннего сгорания проводятся путем тензометрирования при статическом нагружении и непосредственно при работе двигателя. На поверхность крышек коренных подшипников двигателей 4Ч13/14 и 6Ч16/14 в исследуемых точках наклеивались тензорезисторы, как показано на схеме (рисунок 1). Тензорезисторы предварительно проходят тарировку. Регистрация показаний тензорезисторов проводится на осциллографе путем записи на фотобумагу, строятся графики зависимостей напряжений от величины усилия, скорости вращения вала, а также в зависимости от других факторов.

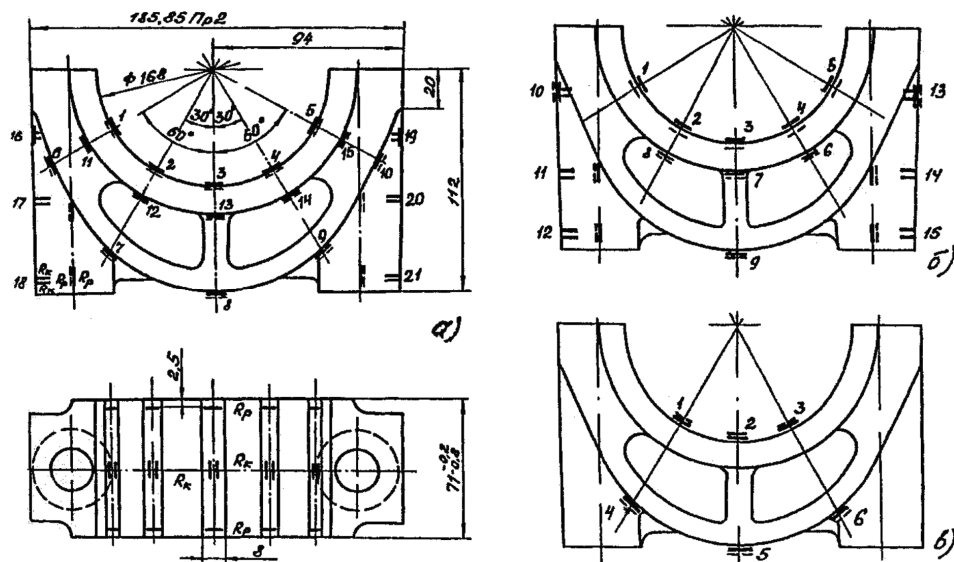


Рисунок 1-Схема наклейки тензористоров на крышки коренных подшипников

По результатам эксперимента значения жесткости крышек коренных подшипников составляют $(2...2,4) \times 10^9$ Н/м, системы «крышка-шпилька» $1,75 \times 10^9$ Н/м. В двигателях с менее жесткими коренными опорами наблюдалось увеличение изгибающих моментов в 3,8-4 раза. Было также установлено, что излишняя затяжка болтов является причиной появления контактных напряжений 380 МПа, что приводит к преждевременному износу деталей стыка. На рисунке 2 приведены графики зависимости напряжений в избранных сечениях крышек коренных подшипников 3,4,5 опор от угла поворота кривошипа, полученные в результате эксперимента.

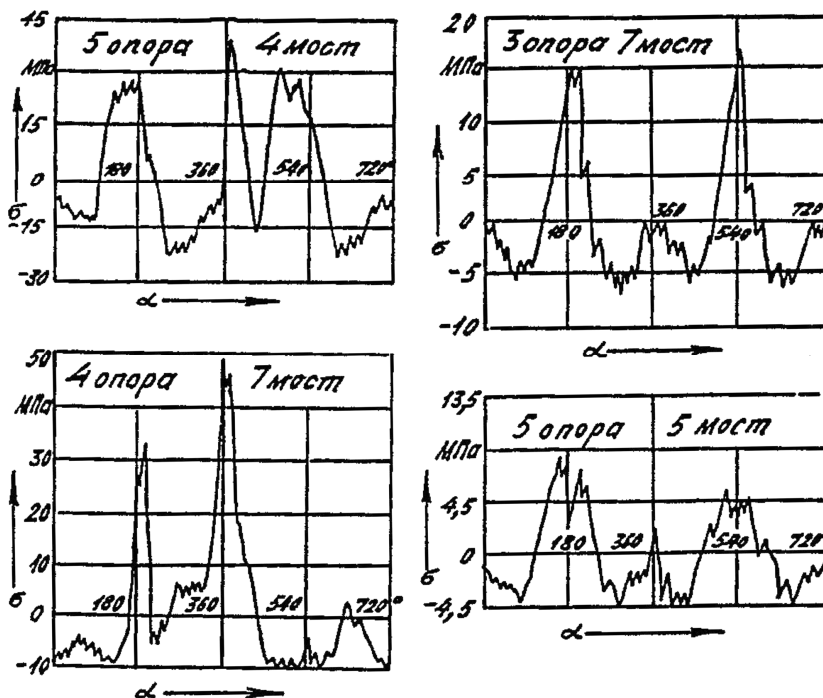


Рисунок 2-Экспериментальные графики изменения напряжения в сечениях крышек коренных подшипников дизеля 4Ч 13/14

МНОГОМАССОВАЯ КРУТИЛЬНАЯ СИСТЕМА ГУСЕНИЧНОГО ТРАКТОРА Т-4

Бекетов С.С. – студент, Попович В.С. - д.т.н., профессор
Алтайский государственный технический университет (г. Барнаул)

При любом исследовании крутильных колебаний в реальных силовых передачах тракторов, автомобилей и других машин производится приведение системы – замена действительной сложной колебательной системы с бесконечно большим числом степеней свободы приведенной упрощенной системой с ограниченным количеством сосредоточенных масс. Обычно приведенная крутильно-колеблющаяся система представляет собою безинерционный вал постоянного сечения с жестко насаженными на него цилиндрическими дисками. Сечение вала принимается равным сечению какого-нибудь характерного участка валопровода, чаще всего сечению коренной шейки коленчатого вала двигателя. Длины участков приведенного вала выбираются из условий равенства коэффициентов жесткости (или податливостей) действительных и приведенных участков. Моменты инерции дисков в приведенной системе должны быть равны моментам инерции соответствующих элементов действительного валопровода.

Очень важным моментом приведения систем является выбор числа сосредоточенных масс. Излишне большое число масс делает расчеты громоздкими и трудоемкими даже при использовании современной вычислительной техники. Слишком малое количество сосредоточенных масс может исказить динамические явления в системе, значительно снизить возможности анализа этих явлений. Очевидно, что в расчетной схеме целесообразно иметь оптимальное количество масс, вполне достаточное для решения поставленных задач, обеспечивающее минимальные затраты труда и времени при вычислениях и правильно отражающее характер и интенсивность анализируемых колебательных явлений.

В качестве исходной многомассовой крутильной системы возьмем крутильную систему валопровода трактора Т-4 АТЗ на первой передаче основного ряда (пятая передача) при наличии резинового амортизатора у ведущих колес и буксования трактора $\delta=3\%$. Схема системы дана на рисунке 1.

В исходную систему входит 19 масс. Расчет такой системы дает полное представление о частотах и формах её свободных (резонансных) колебаний, но технически этот расчет достаточно трудоемок, особенно если исследуется большое число вариантов. Необходимо уменьшить число сосредоточенных масс.

Как видно из рисунка 1, наибольшие численные значения имеют приведенные массы № 9 (маховик), 19 (масса трактора) и 18 (гусеницы), наибольшей податливостью обладают участки 18-19 (гусеница-грунт-масса трактора), 17-18 (амортизаторы на ведущих колесах), 1-2 (вентиляторный ремень), 15-16 (заднего моста), 10-11 и 11-12 (кардан).

Очевидно, при составлении упрощенных систем выполнить два вышеизложенных условия трудно, если упрощенная система состоит из малого количества масс. Поэтому при упрощении системы будем одновременно рассматривать несколько возможных вариантов.

Развернутая система, состоящая из 19 масс, с известными частотами и формами колебаний заменялась по методу слияния масс системами с меньшим числом масс (последовательно 2,3,4 ... 10).

Проанализированы результаты основных вариантов, рассмотренные выше. Четыре метода упрощения систем – центра моментов инерции (или метод Ривина Е. И.), энергетический и трехмассовых парциальных систем – позволяют выполнить упрощение многомассовой системы с высокой степенью точности по частоте.

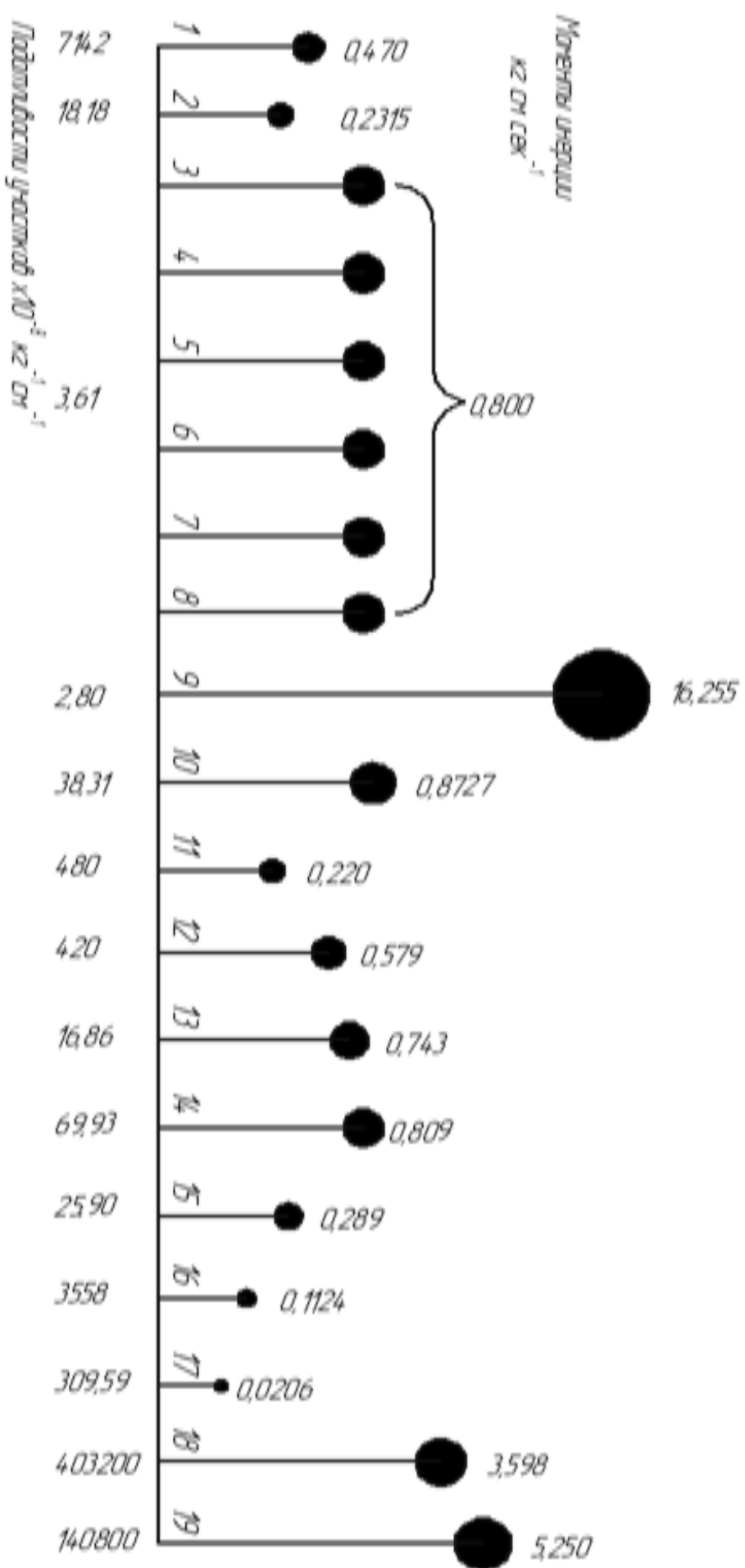


Рисунок 1 Схема кругляковой системы биопроцесса грампара Т-4 АТЗ на этапе передачи: 1 – вентилятор с электродвигателем и воздушного колеса $\delta=3\%$; 2 – шкив вентилятора; 3-8 – цилиндрические массы; 9 – маховик и муфта сцепления; 10-11 – карданный вал; 12 – реверс-редуктор; 13-14 – карданный вал; 15, 16, 17 – механизм подбора и доработки передачи; 18 – элеватор; 19 – масса грампара.

**ИССЛЕДОВАНИЯ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ КОЛЕНЧАТЫХ ВАЛОВ
 ДВИГАТЕЛЯ 4Ч13/14 НА СТЕНДОВОЙ УСТАНОВКЕ**
 Вольных А.П. – студентка, Попович В.С. – д.т.н., профессор
 Алтайский государственный технический университет (г. Барнаул)

Динамические нагрузки, возникающие под действием периодически изменяющихся усилий, могут при определенных условиях являться причиной значительных механических напряжений в элементах коленчатого вала. Крутильные колебания коленчатых валов двигателей внутреннего сгорания, возникающие вследствие недостаточной жесткости валов под действием переменных по величине и направлению крутящих моментов двигателя, влияют на долговечность работы валов и подшипников скольжения. Для всестороннего анализа всех аспектов проявления крутильных колебаний необходим их расчет.

При расчете действительная сложная система валопровода коленчатого вала заменяется эквивалентной системой. На рисунках 1 и 2 приведены эквивалентные расчетные крутильные схемы двигателя 4Ч13/14.

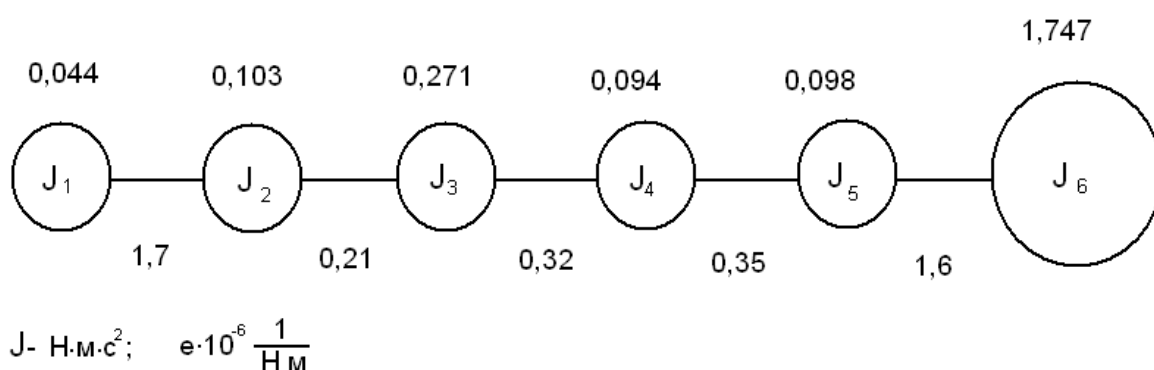


Рисунок 1 – Расчетная крутильная схема двигателя 4Ч13/14

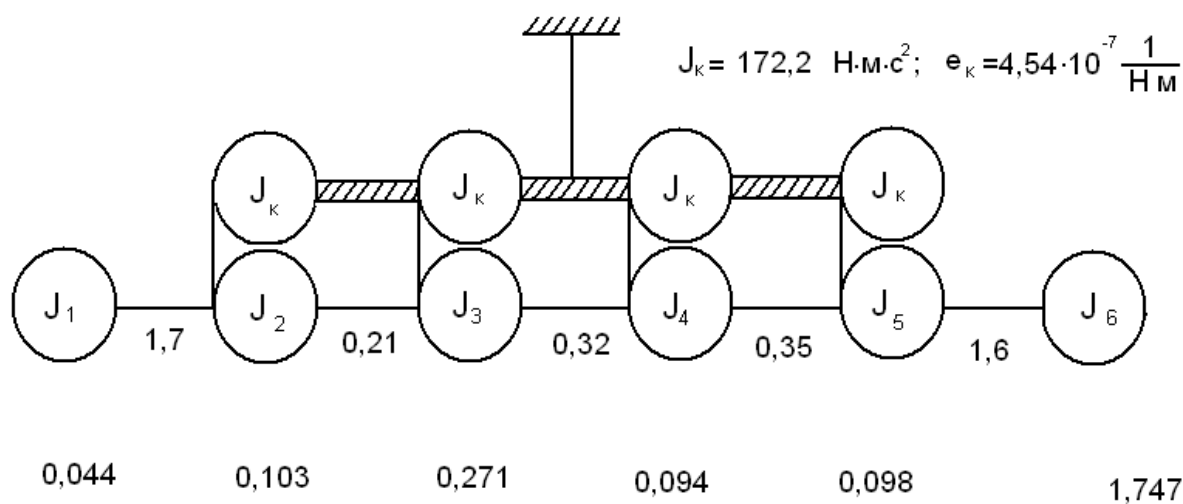


Рисунок 2 - Расчетная крутильная схема двигателя 4Ч13/14 с учетом упругой подвески

Для определения частот и форм свободных крутильных колебаний используется метод Толе(метод остатка), основанный на том положении, что при свободных крутильных колебаниях многомассовой системы сумма моментов сил упругости отдельных участков вала и моментов сил инерции всех колеблющихся масс должна равняться нулю. Процесс определения значений собственных частот использует диаграмму остаточных моментов.

Значения набегающих крутящих моментов, действующих на кривошпы вала, определяются из результатов динамического расчета кривошипно-шатунного механизма двигателя. Сложный периодический закон изменения крутящих моментов от действия сил давления газов и сил инерции подвергается гармоническому анализу путем разложения в ряд Фурье. Определяют основные параметры разложения, такие как амплитуды, фазы и частоты гармонически изменяющихся слагаемых моментов.

Каждая из гармоник возбуждает колебания крутильной системы вала.

Определяются резонансные колебания системы коленчатого вала путем сравнения частот одного из видов собственных крутильных колебаний с частотами возмущающих гармоник, полученного в результате гармонического анализа кривой крутящего момента, и резонансные частоты вращения коленчатого вала. При резонансе определяются амплитуды колебаний и дополнительные напряжения в сечениях элементов вала. С учетом периодов свободных крутильных колебаний и изменения возбуждающего момента при различных коэффициентах демпфирования в системе строятся графики изменения коэффициента нарастания колебаний.

Разработан алгоритм и программное обеспечение для исследования крутильных колебаний в валопроводах двигателей с учетом указанных аспектов.

МОДЕЛЬ ТРИБОЛОГИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Вольных А.П. – студентка, Котенёва Н.В. – к.т.н., доцент
Алтайский Государственный Технический Университет (г. Барнаул)

Будучи междисциплинарной наукой, трибология требует применения системных моделей, информационных систем по разным разделам трибологии, трансляторов, соединяющих эти разделы, экспертных систем для проектирования и диагностики.

Понятие «модель трибосистемы» может быть определено как некоторая логико-математическая структура, имеющая систему переменных, соответствующих элементам трибосистемы. Данные элементы трибосистемы могут быть классифицированы как её основные подсистемы: подсистема выбора материала; прочностная подсистема; динамическая подсистема; подсистема контактирования; подсистема трения и изнашивания; термодинамическая подсистема [2].

Простая трибомеханическая (триботехническая) система (рисунок 1) состоит из таких составляющих: 1; 2 – контактирующие детали (элементы), 3 – смазочный материал, 4 – внешняя среда, 5 – защита системы.

Трибологическая система характеризуется такими компонентами: технической функцией TF , структурой S , совокупностью параметров, которые описывают вход X , выход Y , возмущения W и потери Z (рисунок 2) [1].

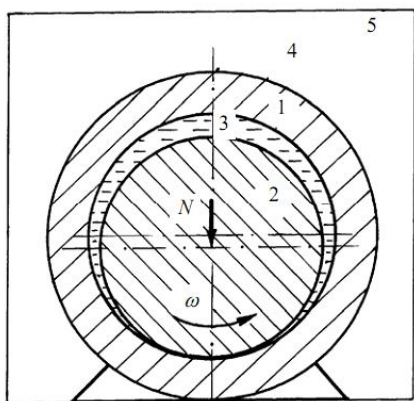


Рисунок 1 – Триботехническая система скольжения

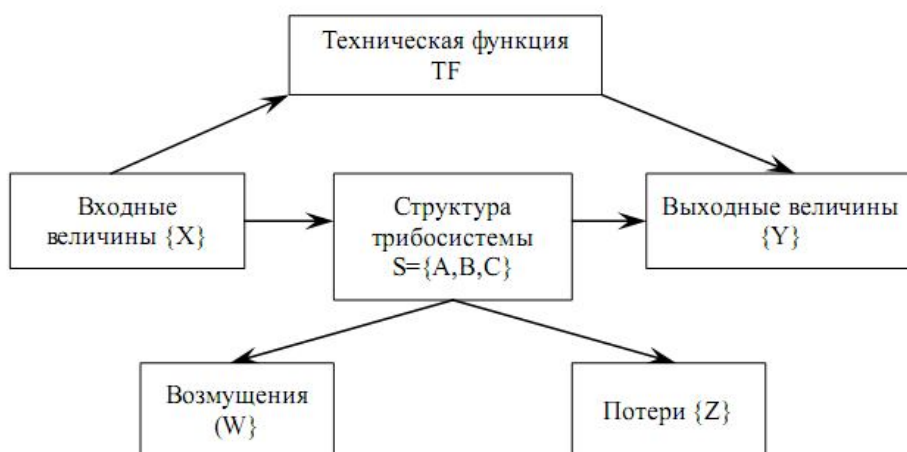


Рисунок 2 – Структура трибосистемы

Трибологические свойства - свойства материала, определяемые при нагружении в условиях модельной трибосистемы. Важнейшими определяемыми трибологическими характеристиками материала являются: износ и сила трения.

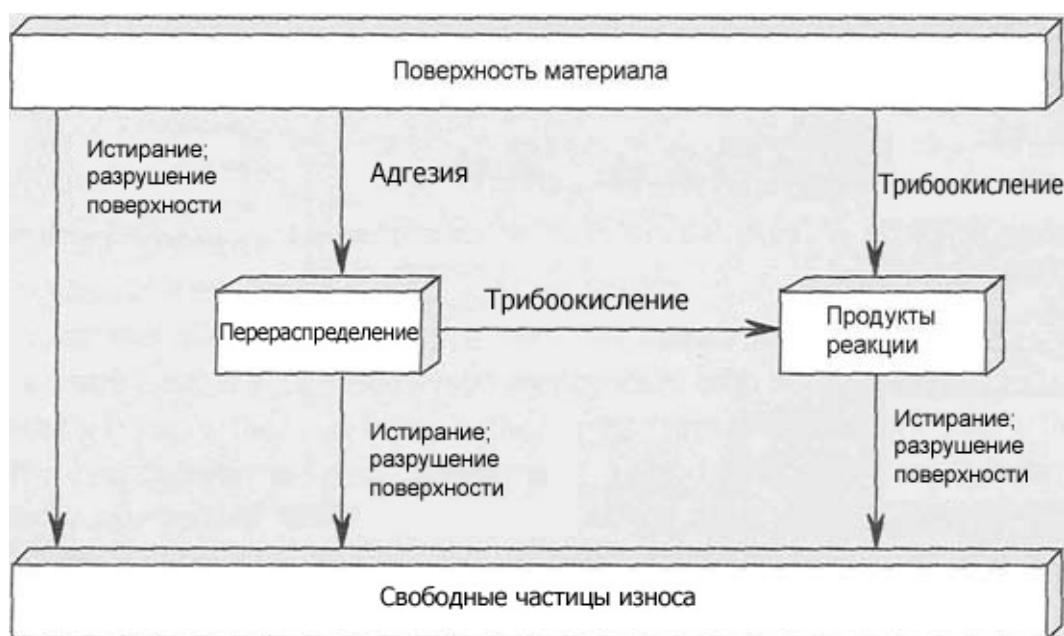


Рисунок 3 - Взаимное наложение механизмов износа

Согласно современным представлениям о процессах указанных видов изнашивания, всех их, можно считать процессами фрикционной (вызванной трением) усталости с различным количеством разрушающих циклов напряжений.

Таким образом, зная, что 85-95% случаев выхода из строя разнообразных машин и механизмов вызвано износом деталей узлов трения, важное значение приобретает оценка сопротивления материалов изнашиванию, которая невозможна без представления о модели трибологической системы и ее трибологических свойствах.

Список литературы

1. Механика трибоконтактного взаимодействия при скольжении// под ред. Чернеца М.В., Клименко Л.П. - Николаев: - НГГУ им. Петра Могилы, 2006, том 1.

2. Польский, Е.А., Сорокин С.В. Разработка модели трибологической системы контактирования деталей пар трения. - Вестник Брянского государственного технического университета, 2006 №2(10)

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В РАСЧЕТАХ НА ПРОЧНОСТЬ ДЕТАЛЕЙ МАШИН

Кантузов А. В., студент, Попович В. С., д.т.н., профессор
Алтайский государственный технический университет (г.Барнаул)

Совершенствование и развитие численных методов анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) сложных деталей машин и, в первую очередь, метода конечных элементов (МКЭ) как эффективного математического аппарата инженерного проектирования направлено в настоящее время на повышение достоверности и увеличение производительности выполняемых расчетов. Это тесным образом связано с автоматизацией проектных работ.

Инженеру-конструктору приходится иметь дело как со сложными комплексными проектами, так и с отдельными конкретными деталями таких проектов. В этом случае большая часть времени и затрат на решение задач с использованием МКЭ расходуется на формирование и проверку входной и выходной информации.

Программная реализация алгоритма полуавтоматической подготовки исходной информации позволяет существенно повысить эффективность использования программы расчета напряженно-деформированного состояния МКЭ сложных деталей и будет способствовать более широкому внедрению ее в практику инженерного проектирования. Кроме того, это позволит исключить еще один источник ошибок, допускаемых в процессе разбивки сложной конструкции детали на треугольные конечные элементы, т.е. при формировании исходных данных для программы анализа НДС сложных деталей.

Для конструирования дискретной модели детали сложной конфигурации (шатун, блок-картер, головка цилиндров и т.п.) используются четырехугольные элементы. Четырехугольный элемент общего вида представлен интерполяционным полиномом который имеет вид

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot y + \alpha_4 \cdot xy \quad (1.1)$$

Вместо членов x^2 и y^2 здесь оставлено произведение xy , потому, что гарантирует линейное изменение φ вдоль каждой линии, где постоянны x и y . В узлах прямоугольника выполняются условия

$$\varphi = \Phi_1 \text{ при } x = -b, y = -a,$$

$$\varphi = \Phi_2 \text{ при } x = b, y = -a,$$

$$\varphi = \Phi_3 \text{ при } x = b, y = a,$$

$$\varphi = \Phi_4 \text{ при } x = -b, y = a,$$

Подстановка этих выражений в (1.1) и решение системы четырех уравнений относительно α преобразует исходное соотношение к виду

$$\varphi = N_1 \Phi_1 + N_2 \Phi_2 + N_3 \Phi_3 + N_4 \Phi_4 = [N] \{\Phi\},$$

где

$$N_1 = \frac{1}{4ab} (\mathbf{b} - \mathbf{x})(\mathbf{a} - \mathbf{y}), \quad N_2 = \frac{1}{4ab} (\mathbf{b} + \mathbf{x})(\mathbf{a} - \mathbf{y}),$$

$$N_3 = \frac{1}{4ab} (\mathbf{b} + \mathbf{x})(\mathbf{a} + \mathbf{y}), \quad N_4 = \frac{1}{4ab} (\mathbf{b} - \mathbf{x})(\mathbf{a} + \mathbf{y}).$$

Полученные результаты для прямоугольного элемента могут быть записаны в безразмерной форме через соотношения x/b и y/a . Если обозначить эти соотношения $\xi = x/b$ и $\eta = y/a$, то функции формы могут быть представлены в виде произведения безразмерных координат. Введенная система координат (рисунок 1б) называется естественной системой, потому, что координаты при этом изменяются в диапазоне ± 1 .

Интерполяционные полномы соответственно для квадратичного четырехугольного элемента запишутся в виде

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi \eta + \alpha_5 \xi^2 + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \xi^2 \eta + \alpha_8 \xi \eta^2.$$

Квадратичные четырехугольники обладают значительной гибкостью, могут использоваться в качестве прямоугольника, четырехугольника общего вида или треугольника. Восемь узлов, формирующих зону, нумеруются как показано на рисунке 1в, г.

Узлу 1 всегда соответствуют координаты $\xi=\eta=-1$. Узлы нумеруются последовательно, начиная от точки с координатами $\xi=-1, \eta=-1$ и двигаясь слева направо (при изменении ξ от -1 до +1) и сверху вниз (при изменении η от +1 до -1). Для варьирования размерами треугольных элементов, на которые впоследствии делиться зона, можно смещать узлы 2, 4, 6 и 8 относительно середин соответствующих сторон. Однако эти узлы должны оставаться в интервале координат $-1/2 < \xi < 1/2$ или $-1/2 < \eta < 1/2$.

Четырехугольная зона делиться на треугольные элементы, количество которых будет определяться выбранной схемой разбивки. Для этого задаются данные разбивки: число строк узлов m и число столбцов n . Выбор необходимого количества строк и столбцов узлов фиксирует также число строк или столбцов для прилежащих зон, поскольку число узлов вдоль общих границ различных зон должно быть одинаково.

Разбиение четырехугольной зоны на треугольные элементы осуществляется следующим образом. Рассматриваются четыре узла, которые образуют четырех угольник и вычисляются длины двух его диагоналей по формулам

$$D(1) = \sqrt{(x_{ij} - x_{i+1,j-1})^2 + (y_{ij} - y_{i+1,j-1})^2},$$

$$D(2) = \sqrt{(x_{i,j-1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i,j-1} - y_{i+1,j})^2},$$

где $i=1,2, \dots, m-1$; $j=2, 3, \dots, n$.

Затем сравниваются величины этих диагоналей и разбиение производится по меньшей из них. Эта процедура повторяется до тех пор, пока не будут рассмотрены все множества, состоящие из соседних четырех узлов.

Координаты для i -й строки η_i j -го столбца ξ_j определяются

$$\eta_i = 1 - \frac{2}{m-1}(i-1), \quad \xi_j = -1 + \frac{2}{n-1}(j-1),$$

где i - номер строки, j - номер столбца.

В соответствии с этим точка с координатами $\eta_i \xi_j$ получается пересечением i -й строки и j -го столбца.

С учетом принятых соотношений функции формы для квадратичного элемента имеют вид

$$N_1 = 1/2 \cdot (1 - \xi) \cdot (1 - \eta) \cdot (1 + \xi + \eta),$$

$$N_2 = 1/2 \cdot (1 - \xi^2) \cdot (1 - \eta),$$

$$N_3 = 1/4 \cdot (1 + \xi) \cdot (1 - \eta) \cdot (\xi - \eta - 1),$$

$$N_4 = 1/2 \cdot (1 - \eta^2) \cdot (1 + \xi),$$

$$N_5 = 1/4 \cdot (1 + \xi) \cdot (1 + \eta) \cdot (\xi + \eta + 1),$$

$$N_6 = 1/2 \cdot (1 - \xi^2) \cdot (1 + \eta),$$

$$N_7 = -1/4 \cdot (1 - \xi) \cdot (1 + \eta) \cdot (\xi - \eta + 1),$$

$$N_8 = 1/2 \cdot (1 - \xi) \cdot (1 - \eta^2).$$

Восемь значений NDN , так называемы глобальные номера узлов, определяют четырехугольники зон. Номера узлов указываются для каждой зоны, двигаясь слева направо и сверху вниз (против часовой стрелки).

Глобальные координаты узлов области

$$X_{ij} = \sum_{k=1}^8 N_k \cdot X_k,$$

$$Y_{ij} = \sum_{k=1}^8 N_k \cdot Y_k,$$

где $k=1,2,\dots,8$ – номера граничных точек области;

X_k, Y_k – глобальные координаты k -точек области.

Затем определяются номера узлов на границе зоны, при переходе к другой области с учетом данных соединения, проверяется наличие уже пронумерованных узлов, чтобы избежать их двойной нумерации.

Для определения полосы ленточной матрицы для каждого треугольного элемента определяется величина $(R+1)$, где R – максимальная разность номеров узловых точек треугольника. Для достижения минимального значения $(R+1)$ следует начинать разбиение на элементы с самой верхней зоны и затем двигаться вниз и направо.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ В СОПРЯЖЕННЫХ ДЕТАЛЯХ ГАЗОВОГО СТЫКА ДВИГАТЕЛЯ 4Ч 13/14

Студенты Кротова О.А., Летунов Н.Н., Попович В.С.- д.т.н., профессор
Алтайский государственный технический университет (г. Барнаул)

Для обеспечения надежности газового стыка сопряженных деталей «головка цилиндров- прокладка- блок-картер» необходимо знать деформированное состояние сопряжения. Аналитически они могут быть определены путем составления дифференциальных уравнений деформации системы с двухсторонними связями, уравнений Лагранжа II рода. Структурная схема данного соединения приведена на рисунке 1. В качестве обобщенных координат выбираем перемещения x_1, x_2, x_3 сопряженных деталей газового стыка двигателя.

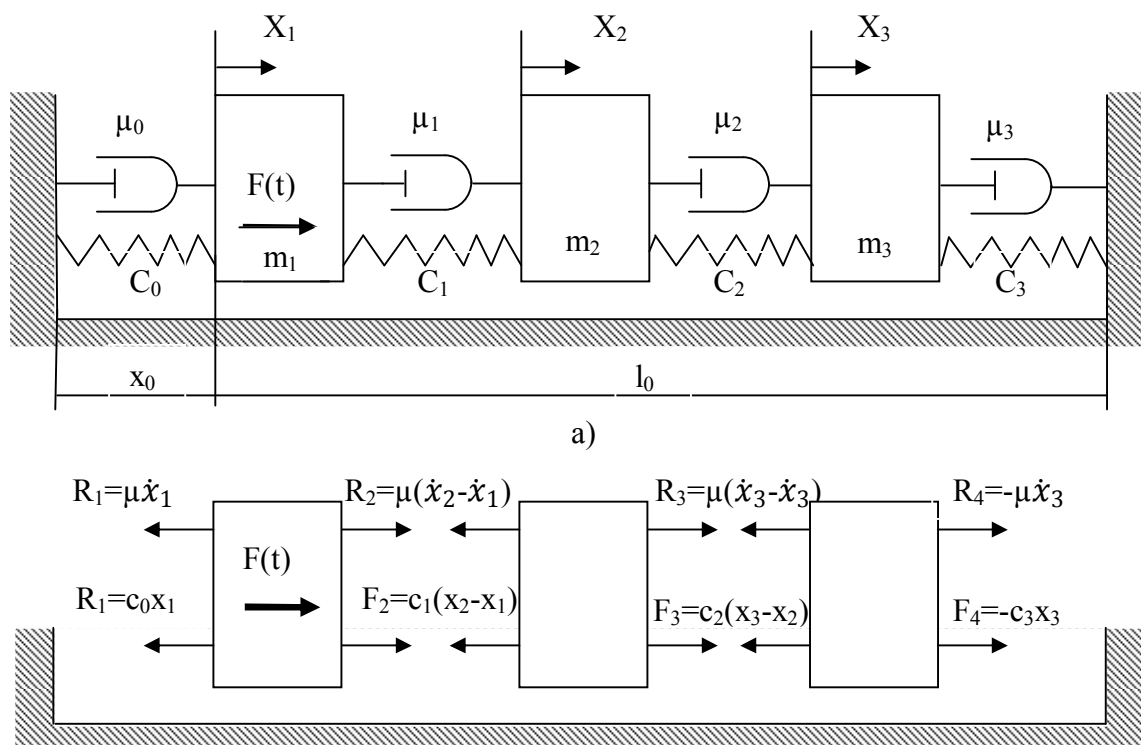


Рисунок 1- Расчетная структурная схема колебаний деталей газового стыка

Жесткости отдельных элементов силового узла определяются с учетом высот стягиваемых деталей, расчетной длины шпильки, площадей поперечных сечений на середине высоты голо - вки и участка блока, площади сечения прокладки и модулей упругости материалов деталей. Пе- ремещения сопряженных деталей газового стыка двигателя предусматривают определение жесткостей элементов:

$$c_1 = 1/k_1 = E_1 F_1 / l_1 \text{ - жесткость головки цилиндров;}$$

$$c_2 = 1/k_2 = E_2 F_2 / l_2 \text{ - жесткость прокладки;}$$

$$c_3 = 1/k_3 = E_3 F_3 / l_3 \text{ - жесткость части блока;}$$

$$c_0 = 1/k_0 = E_0 F_0 / l_0 \text{ - жесткость шпильки.}$$

Исходные данные для расчета деформаций сопряженных деталей газового стыка приведены в таблице 1.

В процессе сборки деталей соединения к гайке шпильки прикладывается момент затяжки, создаваемый силу предварительной затяжки $P_{пр}$, растягивающую шпильку и сжимающую стягиваемые детали. Шпилька при этом удлиняется, величина сжатия стягиваемых деталей определяется суммой деформаций головки, прокладки и блока.

Таблица 1- Исходные данные для расчета деформаций сопряженных деталей газового стыка

Детали газового стыка	Модуль упругости 1 рода материала, МПа	Высоты сопряженных деталей, см	Площади поперечных сечений, см ²	Масса деталей, кг	Податливость деталей
1	$2,1 \cdot 10^5$	22,4	2,01	0,35	$5,4 \cdot 10^5$
2	$9,8 \cdot 10^4$	13,5	7,8 (под бонкой гайки)	20	$17,6 \cdot 10^5$
3	$0,78 \cdot 10^3$	0,25	5,0	0,15	$6,4 \cdot 10^5$
4	$9,8 \cdot 10^4$	6,8	7,8	50	$8,89 \cdot 10^5$

В таблице 1-шпилька, 2- головка цилиндров, 3- прокладка, 4-блок цилиндров.

Шпилька удлиняется на величину $x_0 = K_0 \cdot P_{пр}$

В свою очередь величина сжатия стягиваемых деталей определяется суммой деформаций:

$$x_1 + x_2 + x_3 = (k_1 + k_2 + k_3) \cdot P_{пр}.$$

В процессе вспышки при разгружаемом газовом стыке сила давления газов, передающаяся через головку, растянёт дополнительно шпильку на величину Δx_0 и деформирует на величину Δx_1 головку. Суммарная деформация равна $\Delta x_0 + \Delta x_1$. При этом прокладка и блок разгрузятся, суммарное сжатие их уменьшится на ту же величину $\Delta x_0 + \Delta x_1$. В результате сила давления в стыке на головку и шпильку со стороны прокладки и блока при вспышке уменьшится на ΔP :

$$P_{ст} = P_{пр} - \Delta P$$

Та же сила будет сжимать в этот момент прокладку и блок.

Сила, растягивающая шпильку при вспышке, определяется суммой двух сил и с учетом замены равна:

$$P_p = P_{ст} + \dot{P}_z = P_{пр} - \Delta P + \dot{P}_z$$

Дополнительное удлинение шпильки и сжатие головки, возникающие в момент приложения силы \dot{P}_z определяется:

$$\Delta x_0 + \Delta x_1 = (K_0 + K_1) \cdot (P_p - P_{пр}) = (K_0 + K_1) \cdot (\dot{P}_z - \Delta P).$$

Уменьшение деформаций сжатия прокладки и блока в момент вспышки определяется:

$$\Delta x_2 + \Delta x_3 = (k_2 + k_3) \cdot \Delta P.$$

Для обеспечения плотности газового стыка должно выполняться равенство деформаций:

$$\Delta x_0 + \Delta x_1 = \Delta x_2 + \Delta x_3.$$

В качестве обобщенных координат выбираем x_1, x_2 и x_3 , соответствующие перемещения элементов из положения равновесия. В результате имеет место переход энергий деформаций, величины которых определяются:

$$\text{кинетическая энергия } T = \frac{m_1 * x_1^2}{2} + \frac{m_2 * x_2^2}{2} + \frac{m_3 * x_3^2}{2}; \quad (1)$$

потенциальная энергия деформации системы равна энергии упругих деформаций

$$\Pi = \frac{c_1 * x_1^2}{2} + \frac{c_2 * (x_2 - x_1)^2}{2} + \frac{c_3 * (x_3 - x_2)^2}{2} + \frac{c_4 * x_3^2}{2}. \quad (2)$$

Диссипативная функция, вычисляется как половина мощности, развиваемая силами сопротивления (вязкого трения):

$$\Phi = \frac{\mu_1 * \dot{x}_1^2}{2} + \frac{\mu_2 * (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2}{2} + \frac{\mu_3 * (\dot{x}_3 - \dot{x}_2)^2}{2} + \frac{\mu_4 * \dot{x}_3^2}{2}. \quad (3)$$

Для составления уравнений деформации используются переменные, полностью описывающие принятую расчетную схему.

Дифференциальные уравнения колебаний составляются около положения равновесия системы, состоящей из трех масс m_1, m_2, m_3 . С учетом сил сопротивления демпфирования, пропорциональных скоростям движения масс относительно цилиндра $F_k^{\text{сопр}} = \mu_k v_k^{\text{отн}}$, при $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu$ и силы упругости k -ой пружины, пропорциональны ее удлинению $F_k^{\text{упр}} = c_k \Delta_k$, при $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c$; Δ_k - деформация пружины.

Для решения с помощью уравнений Лагранжа II рода выбираем в качестве обобщенных координат перемещения x_1, x_2, x_3 , соответствующих грузов из положения равновесия.

Система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= F(t) - \mu_1 \dot{x}_1 - c_1 x_1 + \mu_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_2 (x_2 - x_1); \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -\mu_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - c_2 (x_2 - x_1) + \mu_3 (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + c_3 (x_3 - x_2); \\ m_3 \ddot{x}_3 &= -\mu_3 (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) - c_2 (x_3 - x_2) - \mu_4 \dot{x}_3 - c_4 x_3. \end{aligned} \quad (4)$$

О ЖЕСТКОЙ И УПРУГОЙ НЕРАВНОМЕРНОСТИ ВРАЩЕНИЯ КОЛЕНЧАТОГО ВАЛА

Мануилов А.А.-студент, Попович В.С.-д.т.н., профессор
Алтайский государственный технический университет(г. Барнаул)

При обычных расчетах, а также и при экспериментальных исследованиях крутильных колебаний (посредством торсиографирования), как правило, не уделяется должного внимания так называемой жесткой неравномерности вращения и жестким колебаниям вала моторной установки.

Однако жёсткая неравномерность может при определённых условиях оказаться довольно существенной в моторных установках с небольшими маховыми массами и большим демпфированием. Пренебрежение ею приводит иногда к ложным выводам, как в расчетах, так и при обработке результатов экспериментов.

Жёсткая неравномерность вращения вала возникает при установившейся частоте вращения коленчатого вала за счет наличия периодического изменения давления газов в цилиндре и сил инерции возвратно поступательно движущихся масс.

Упругая неравномерность определяется возникновением крутильных колебаний в системе коленчатого вала.

Эти колебания вызываются и обуславливаются воздействием на вал всего спектра гармонических моментов, создаваемых давлением газов в цилиндрах ("газовые" гармоники), инерционными силами элементов шатунно-кривошипных механизмов двигателя

(“инерционные” гармоники) и гармоническими компонентами момента внешней нагрузки на двигателе.

Роль и значение каждого из этих гармонических моментов в возникновении и развитии жёстких и упругих колебаний вала различны и зависят от целого ряда обстоятельств. Детальный анализ этого вопроса в общем виде, для много массовой крутильной системы, представляет интерес и значительные затруднения и связан с громоздкими выкладками.

Рассмотрим только простейший случай моногармонического возбуждения, применительно к системам с небольшим числом масс.

В двигательной установке с очень жёстким (в пределе – абсолютно жёстким на скручивание) валом возможно развитие жёстких колебаний этого вала и, соответственно, появление жёсткой равномерности его вращения (коэффициент неравномерности крутящего момента). Вал вместе со всеми, укрепленными на нём массами, колеблется как одно жёсткое целое.

Такие жесткие колебания возникнут при действии на жесткий (на скручивание) вал какого-либо внешнего гармонического возбуждающего момента. Эти колебания будут существовать, несмотря на отсутствие в рассматриваемой системе ка каких-либо упругих элементов.

Имеем много массовую крутильную систему двигатель-маховик. На массы двигателя действуют внешние гармонические возбуждающие моменты какого-либо одного определённого порядка h . Кроме того, на массы двигателя действуют демпфирующие моменты, пропорциональные мгновенной угловой скорости колебательного движения соответствующей массы.

При очень большой жесткости вала установки ($C=\infty$) все массывалопровода могут быть заменены одной сосредоточенной суммарной массой с моментом инерции $\sum J$, а все демпфирование в системе, которое предполагается имеющим характер вязкого трения, учтено некоторым суммарным коэффициентом демпфирования k_c . Теперь суммарный демпфирующий момент в установке определится выражением:

$$M\ddot{\varphi} = -k_c \dot{\varphi}$$

Где φ - мгновенное угловое отклонение каждой из масс от того ее положения, которое она занимала бы сейчас в случае, если бы вал моторной установки вращался совершенно равномерно с постоянным коэффициентом неравномерности крутящего момента.

ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЕМПФИРУЮЩИХ СИЛ В ДВИГАТЕЛЯХ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ

Толпыгин Е.Н. – студент группы ДПМ-61, Попович В.С. – д.т.н., профессор
Алтайский государственный технический университет (г. Барнаул)

Надежная оценка степени опасности работы проектируемой моторной установки на тех или иных критических (или близких к ним) числах оборотов двигателя возможна только на основе подсчета возникающих при этом в валу дополнительных резонансных напряжений. Но для вычисления последних необходимо знание характера и величины демпфирующих сил (сопротивлений) в валопроводе установки, ограничивающих амплитуды резонансных колебаний.

Как известно, есть основания считать, что важнейшими источниками демпфирования крутильных колебаний в моторной установке типа двигатель-маховик являются сопротивления, имеющие характер вязкого трения (в подшипниках коленчатого вала и т.д.) и внутреннее трение (гистерезис) в материале вала установки. В этих условиях энергетический баланс для стационарных резонансных крутильных колебаний вала многоцилиндрового двигателя с маховиком может быть приближенно записан в виде:

$$A_{\text{возб}} = A_k + A_r,$$

(1)

где $A_{\text{возб}}$ – работа, совершаемая возбуждающими (резонирующими) гармоническими составляющими крутящих элементов, создаваемых на валу каждым цилиндром двигателя, за один цикл резонансных крутильных колебаний вала,

A_k и A_r – работы, поглощаемые за цикл колебаний, соответственно, вязким трением в двигателе и внутренним трением (гистерезисом) в материале вала.

Эти работы определяются известными выражениями [2]:

$$A_{\text{возб}} = \pi M_h \Phi_{1abc} \overrightarrow{\sum \varphi_i}, \quad (2)$$

$$A_k = \pi F r^2 k \omega \Phi_{1abc} \sum \varphi_i^2, \quad (3)$$

$$A_r = \sum a \Phi_{1abc}^q \sum \left[(\varphi_{i+1} - \varphi_i) \frac{c_{i,i+1}}{W_p} \right]^q d^2 l, \quad (4)$$

где M_h – амплитуда вызываемых рассматриваемые резонансные колебания вала гармоник крутящих моментов, создаваемых на валу каждым цилиндром двигателя,

Φ_{1abc} – абсолютная амплитуда (в радианах) резонансных колебаний первой массы рассматриваемой приведенной колебательной системы,

φ_i – относительная амплитуда свободных колебаний i -ой массы установки (при $\varphi_1 = 1$),

$\overrightarrow{\sum \varphi_i}$ – геометрическая сумма относительных амплитуд свободных колебаний приведенных масс цилиндров двигателя, определяемая с помощью фазовой диаграммы возбуждающих моментов,

$\sum \varphi_i^2$ – алгебраическая сумма квадратов относительных амплитуд приведенных масс цилиндров двигателя,

k – коэффициент вязкого (линейного) демпфирования в двигателе,

a – константа гистерезиса, зависящая от характеристик материала данного участка вала,

q – гистерезисный показатель (также зависящий от характеристик материала участка вала),

ω – угловая частота резонансных крутильных колебаний вала рассматриваемой моторной установки (равная частоте его свободных колебаний),

$c_{i,i+1}$ – жесткость вала на участке между двумя соседними (i -ой и $i+1$ -ой) массами установки,

W_p – полярный момент сопротивления поперечного сечения вала установки на данном участке,

d и l – соответственно, диаметр и длина каждого участка вала,

F и r – соответственно, площадь поршня и радиус кривошипа.

При составлении и применении выражений (2)-(4) обычно принимается, что кривая формы резонансных колебаний вала моторной установки подобна кривой формы свободных колебаний того же вала. Как известно, в системах с небольшим демпфированием такое допущение вполне уместно и не вносит сколько-нибудь заметных погрешностей в последующие расчеты. Это допущение принимается и нами в дальнейшем исследовании.

Запишем выражения (2) и (4) в более краткой форме

$$A_{\text{возб}} = \lambda M_h \Phi_{1abc}, \quad (5)$$

$$A_k = \mu k \omega \Phi_{1abc}^2, \quad (6)$$

где приняты обозначения

$$\lambda = \pi \overrightarrow{\sum \varphi_i}, \quad (7)$$

$$\mu = \pi F r^2 \sum \varphi_i^2, \quad (8)$$

Предположим, для дальнейшего упрощения, что весь вал моторной установки выполнен из одного материала, с постоянными по всей длине вала коэффициентами a и q .

Согласно принятому выше допущению, величины λ , μ и ν зависят, прежде всего, от характера кривой формы свободных колебаний вала установки. Кроме того, коэффициент λ учитывает число работающих цилиндров двигателя, порядок h резонирующих гармонических моментов M_h , а для второстепенных порядков h и порядок чередования вспышек в цилиндрах двигателя. Коэффициент ν зависит от размеров (F и r) и числа цилиндров. Наконец, коэффициент ν зависит от конкретных размеров вала установки (d, l) и гистерезисного показателя q (то есть физических характеристик материала вала).

Теперь, на основании (5), (6) запишем выражение (1) энергетического баланса при установившемся резонансе в следующем виде

$$\lambda M_h \Phi_{1abc} = \mu k \omega \Phi_{1abc}^2 + \nu a \Phi_{1abc}^q. \quad (9)$$

Из данного уравнения можно найти (например, графическим путем) резонансную амплитуду получим Φ_{1abc} первой массы, которая будет иметь место при работе двигателя на данном критическом числе оборотов. По этой величине Φ_{1abc} нетрудно известными способами вычислить и величины дополнительных вибрационных напряжений скручивания на каждом, интересующем нас участке вала.

Но для конкретного решения этой задачи необходимо знание конкретных значений величин k , a и q для данной (например, проектируемой) моторной установки. Однако опытных данных по коэффициентам k , a и q имеется ещё очень мало. Раздельное определение экспериментом характеристик различных видов демпфирующих сил, имеющихся в моторных установках, представляет большие трудности. Теоретическая же сторона вопроса о демпфирующих силах в таких установках разработана ещё недостаточно.

По этим причинам уравнение (9) почти не применяется для практических расчетов и заменяется одним из двух более простых

$$\lambda M_h \Phi_{1abc} = \mu k_0 \omega \Phi_{1abc}^2, \quad (10)$$

$$\lambda M_h \Phi_{1abc} = \nu a_0 \Phi_{1abc}^q. \quad (11)$$

Правые части этих уравнений сходны, по своей структуре, с выражениями (6) и (9).

Уравнение (10) является основой известной линейной методики расчета резонансных крутильных колебаний, предложенной в своё время Видлером [1]. Здесь все имеющееся в моторной установке демпфирование (как линейное, вязкое – в механизме двигателя, так и нелинейное, гистерезисное – в материале вала) оценивается некоторыми обобщенными коэффициентами k_0 и a_0 .

Численные величины этих коэффициентов в конкретной моторной установке может быть сравнительно просто найдены экспериментальным путем. Для этого следует воспользоваться вытекающим из (10) соотношением

$$k_0 = \frac{\lambda M_h}{\nu \Phi_{1abc}}$$

и подставить в него величину Φ_{1abc} , определенную непосредственно торсиографированием вала этой установки во время работы её на критическом числе оборотов.

В уравнении (11) всё имеющееся в моторной установке демпфирование (линейное в двигателе и нелинейное, гистерезисное в валу) учитывается (оценивается) некоторым обобщенным гистерезисным коэффициентом a_0 и показателем степени q .

В основе уравнения (11) лежит известное предложение Льюиса [2] – считать гистерезисные потери в материале вала главным источником демпфирования крутильных колебаний в валу моторной установки. Входящий в (11) показатель степени q при расчетах выбирается на основании опытных данных по исследованию гистерезисных потерь в

цилиндрических стальных образцах (Роветт, Дори и др.) или иногда в соответствии с предложением Кер Вильсона [2], принимается равным трем.

По этим же опытным данным может быть выбран и коэффициент a . Но при таком выборе коэффициента a выражение (11), уже своей структурой не учитывающее иных, кроме гистерезисного, видов демпфирования в моторной установке, оказывается обычно очень не точным. Эта неточность будет тем большей, чем меньше удельный вес гистерезисного демпфирования в общей величине демпфирующих сопротивлений в данной установке. Поэтому будет несколько более правильным подставлять в (11) опытное значение этого коэффициента a_0 , найденное обработкой результатов торсиографирования моторной установки, подобной рассчитываемой. Такую обработку можно провести на основе выражения

$$a_0 = \frac{\lambda M_h}{\nu \Phi_{1abc}^{q-1}}$$

вытекающего из (11). Естественно, что эти опытные значения коэффициента a_0 оказываются иными, чем значения коэффициента a , полученные в лабораторных опытах над стальными образцами. Так, например, Портер [1] получил

$$a_0 = 2,84 a.$$

Некоторые опытные данные по обобщенным коэффициентам k_0 и a_0 можно найти в литературе по крутильным колебаниям. Однако эти данные малочисленны и, как показывает их сопоставление и анализ, крайне противоречивы. Попытки применения их в подсчетах резонансных вибраций в новых проектируемых установках часто оказываются неудачными: результаты расчета резонансных амплитуд сильно расходятся с результатами последующего торсиографирования готовой установки. Более того, некоторые эксперименты указывают на непостоянство этих коэффициентов даже в одной и той же моторной установке.

Всё это лишает конструктора возможности сделать выбор ожидаемых значений обобщенных коэффициентов k_0 или a_0 для проектируемой установки достаточно обоснованным и надежным.

Литература

1. Мелькумов Т.М., Нейман И.М. (ред.) *Авиационные двигатели* – М.: Оборонгиз, 1950
2. Болтов А.Т. *О некоторых характеристиках демпфирования крутильных колебаний валов установок с поршневыми ДВС*. Автореферат. Канд. диссертация. ТПИ. – Томск: 1956.

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Шичкина Т. А., - студентка, Попович В.С. – д.т.н., профессор
Алтайский государственный технический университет (г. Барнаул)

Определение частот собственных крутильных колебаний валопровода является первым и важнейшим этапом каждого расчета силовых установок с поршневыми двигателями на крутильные колебания.

Во многих случаях *практики* знания частот одноузловых и двухузловых колебаний приведенной системы достаточно для суждения об эксплуатационной надежности работы данной силовой установки с точки зрения крутильных колебаний ее вала. Такое положение обычно имеет место в установках, работающих при постоянном числе оборотов.

Более глубокие расчеты, включающие в себя определение амплитуд вынужденных колебаний и напряжений скручивания в валу, возникающих при различных критических оборотах, необходимы в установках, работающих в широком диапазоне оборотов, так как здесь не всегда представляется возможным избежать тех или иных резонансов, хотя бы и слабых порядков.

Общий прием определения частот собственных (свободных) крутильных колебаний вала, имеющего ряд укрепленных на нем маховых масс, как известно, сводится к решению системы линейных дифференциальных уравнений.

Решение этой системы уравнений в общем виде, вплоть до окончательной готовой формулы для подсчета частот собственных колебаний системы, имеется только для вала с двумя и тремя маховыми массами. Для систем с большим числом масс этот путь приводит к крайне громоздким детерминатам, развертывание которых ведет к выражениям, едва ли пригодным для практических вычислений в виду их сложности.

В настоящее время имеется ряд более практичных методов определения частот собственных крутильных колебаний многомассовой системы. Все они дают искомое решение в результате ряда проб и последовательных приближений. Общим недостатком всех этих методов приходится считать необходимость проведения большой вычислительной работы. Это обстоятельство затрудняет их широкое внедрение в практику.

В большинстве установок с двигателями внутреннего сгорания имеется ряд одинаковых по величине и равномерно расположенных по валу масс (массы шатунно-кривошипных механизмов цилиндров двигателя). В этих случаях решение задачи может быть упрощено. Для этого имеется ряд методов более быстрого определения частот собственных колебаний системы. В большинстве из них маховые массы всех цилиндров двигателя заменяются одной массой, равномерно распределенной по всей длине коленчатого вала. Этот прием, являясь известным допущением, несколько упрощает определение искомых частот, но приводит к отысканию корней трансцендентных уравнений.

Изложим здесь более общий прием, позволяющий определить частоты собственных колебаний вала с n равными маховыми массами и двумя большими маховиками (такой случай мы имеем напр. в системе бескомпрессорный дизель маховик-динамо и в ряде винтовых судовых установок) графическим путем, без длительных пробных подсчетов.

Рассмотрим упругую колеблющуюся систему, состоящую из ряда маховых масс, связанных между собой отрезками упругого вала. Вал лежит в абсолютно гладких подшипниках.

Обозначим:

I_1, I_2, \dots, I_n - моменты инерции маховых масс каждого цилиндра двигателя относительно оси вала,

I_I, I_{II} - моменты инерции масс маховиков I и II относительно той же оси,

$m_1, m_2, \dots, m_n, m_I, m_{II}$ - величины соответствующих масс, приведенных к радиусу кривошипа r ;

$c_{12}, c_{23}, \dots, c_{n-1,n}, c_{n1}, c_{II}$ - жесткости участков вала между соседними маховыми массами; индексы при c означают номера масс, лежащих по концам данного участка вала,

$\varphi'_1, \varphi'_2, \dots, \varphi'_n, \varphi'_I, \varphi'_{II}$ - соответственно углы отклонения масс $m_1, m_2, \dots, m_n, m_I, m_{II}$ в данный момент времени, от их среднего, равновесного положения,

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \varphi_I, \varphi_{II}$ - угловые амплитуды колебания соответствующих масс.

Для всех масс колеблющейся системы можно написать следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} I_1 \frac{d^2 \varphi_1'}{dt^2} + c_{12}(\varphi_1' - \varphi_2') &= 0 \\ I_2 \frac{d^2 \varphi_2'}{dt^2} - c_{12}(\varphi_1' - \varphi_2') + c_{23}(\varphi_2' - \varphi_3') &= 0 \\ \dots \\ I_{n-1} \frac{d^2 \varphi_{n-1}'}{dt^2} - c_{n-2, n-1}(\varphi_{n-2}' - \varphi_{n-1}') + c_{n-1, n}(\varphi_{n-1}' - \varphi_n') &= 0 \\ I_n \frac{d^2 \varphi_n'}{dt^2} - c_{n-1, n}(\varphi_{n-1}' - \varphi_n') + c_{n, 1}(\varphi_n' - \varphi_1') &= 0 \\ I_I \frac{d^2 \varphi_I'}{dt^2} - c_{n, I}(\varphi_n' - \varphi_I') + c_{I, II}(\varphi_I' - \varphi_{II}') &= 0 \\ I_{II} \frac{d^2 \varphi_{II}'}{dt^2} - c_{I, II}(\varphi_I' - \varphi_{II}') + R &= 0 \end{aligned} \right\}$$

где R – так называемый остаточный момент. При вынужденных колебаниях системы он обозначает внешний возбуждающий момент, приложенной к массе II.

После преобразований получим:

$$\left. \begin{aligned} A\varphi_1 - (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \\ A\varphi_2 + (\varphi_1 - \varphi_2) - (\varphi_2 - \varphi_3) &= 0 \\ \dots \\ A\varphi_{n-1} + (\varphi_{n-2} - \varphi_{n-1}) - (\varphi_{n-1} - \varphi_n) &= 0 \\ A\varphi_n + (\varphi_{n-1} - \varphi_n) - \frac{c_{nI}}{c}(\varphi_n - \varphi_I) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

где : $A = \frac{\theta \omega^2}{c}$

Представим амплитуды колебания масс двигателя следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2 &= \varphi_1 - A\varphi_1 \\ \varphi_3 &= \varphi_2 - A\varphi_1 - A\varphi_2 \\ \varphi_4 &= \varphi_3 - A\varphi_1 - A\varphi_2 - A\varphi_3 \\ \dots \\ \varphi_n &= \varphi_{n-1} - A\varphi_1 - A\varphi_2 - \dots - A\varphi_{n-1} \end{aligned} \right\}$$

Из первых двух выражений системы:

$$\varphi_3 = \varphi_1 - A\varphi_1 - A(\varphi_1 - A\varphi_1) = \varphi_1(1 - 3A + A^2)$$

и далее, подобным же образом:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_4 &= \varphi_1(1 - 6A + 5A^2 - A^3) \\ \varphi_5 &= \varphi_1(1 - 10A + 15A^2 - 7A^3 + A^4) \\ \varphi_6 &= \varphi_1(1 - 15A + 35A^2 - 17A^3 + 8A^4 - A^5) \end{aligned} \right\} \text{ и т.д.}$$

Просуммируем последовательно амплитуды колебаний отдельных масс двигателя:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 + \varphi_2 &= \varphi_1(2 - A), \\ \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 &= \varphi_1(3 - 4A + A^2), \\ \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 &= \varphi_1(4 - 10A + 6A^2 - A^3), \\ \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_5 &= \varphi_1(5 - 20A + 21A^2 - 8A^3 + A^4), \\ \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_6 &= \varphi_1(6 - 35A + 56A^2 - 25A^3 + 9A^4 - A^5) \end{aligned} \right\}$$

и т.д., или в общем виде можно представить :

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^2 \varphi &= B_2 \varphi_1 \\ \sum_1^3 \varphi &= B_3 \varphi_1 \\ \sum_1^n \varphi &= B_n \varphi_1 \end{aligned} \right\}$$

где:

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= 2 - A \\ B_3 &= 3 - 4A + A^2 \\ B_4 &= 4 - 10A + 6A^2 - A^3 \\ B_5 &= 5 - 20A + 21A^2 - 8A^3 + A^4 \\ B_6 &= 6 - 35A + 56A^2 - 25A^3 + 9A^4 - A^5 \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, сумма амплитуд колебания всех масс $m_1 \dots m_n$ двигателя могут быть выражены через амплитуду φ колебания первой массы и коэффициент B , зависящий только от параметра A .

В общем случае для n масс двигателя :

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \varphi_1 \cdot f(A) \\ \sum_1^n \varphi &= B_n \varphi_1 \end{aligned}$$

Вычислим далее соотношения:

$$\left. \begin{aligned} D_2 &= \frac{\varphi_2}{\sum_1^2 \varphi} = \frac{1 - A}{2 - A} \\ D_3 &= \frac{\varphi_3}{\sum_1^3 \varphi} = \frac{1 - 3A + A^2}{3 - 4A + A^2} \\ D_4 &= \frac{\varphi_4}{\sum_1^4 \varphi} = \frac{1 - 6A + 5A^2 - A^3}{4 - 10A + 6A^2 - A^3} \\ D_5 &= \frac{\varphi_5}{\sum_1^5 \varphi} = \frac{1 - 10A + 15A^2 - 7A^3 + A^4}{5 - 20A + 21A^2 - 8A^3 + A^4} \\ D_6 &= \frac{\varphi_6}{\sum_1^6 \varphi} = \frac{1 - 15A + 35A^2 - 17A^3 + 8A^4 - A^5}{6 - 35A + 56A^2 - 25A^3 + 9A^4 - A^5} \\ D_n &= \frac{\varphi_n}{\sum_1^n \varphi} = \dots \end{aligned} \right\}$$

Коэффициенты D зависят только от A , следовательно меняются при изменении ω_1 .

Величина D_n зависит от числа n цилиндров двигателя и параметра A . Поэтому для каждого числа цилиндров можно раз и навсегда построить кривые $D_n=f(A)$, которые можно использовать для определения частот собственных колебаний многомассовой системы.

Изложенный метод является принципиально совершенно точным и содержит только ошибки, неизвестные при любом графическом построении.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ЗАПАСА ПРОЧНОСТИ

Студент Пестрецов Р. Е., преподаватель д. т. н., профессор Попович В. С.
Алтайский государственный технический университет им. И. И. Ползунова

Нормальные и касательные напряжения в элементах коленчатого вала определяются по следующим зависимостям:

$$\sigma = \frac{M_{\text{из}}}{W_{\sigma}}, \quad \tau = \frac{M_{\text{кр}}}{\tau}, \quad (1)$$

где $M_{\text{из}}$ и $M_{\text{кр}}$ - матрицы-векторы значений изгибающих и крутящих моментов в расчетных сечениях элементов вала,

W_{σ} и W_{τ} - моменты сопротивления изгибу и кручению сечений вала.

Для определения напряжений в щеках коленчатого вала необходимо знать моменты инерции и моменты сопротивления сечений щек. Вид сечения и схема определения моментов сопротивления показаны на рисунке 1. Поскольку сечение щеки, проходящее через точки A и B (с учетом перекрытия шеек), имеет сложную конфигурацию, то разбиваем это сечение на три участка: 1-ый участок – верхний сегмент, 2-ой участок – нижний сегмент, 3-ий участок – прямоугольник размера $b * h$. Момент инерции сечения определяем относительно оси $Z - Z$, которая является осью симметрии и центральной осью для прямоугольника. Ординаты центров тяжести сегментов определяем по формулам:

$$O_1 C_1 = \frac{4}{3} R_1 \frac{\sin^3 \frac{\alpha_1}{2}}{\frac{\alpha_1^0 \pi}{180^0} - \sin \alpha_1}, \quad O_2 C_2 = \frac{4}{3} R_2 \frac{\sin^3 \frac{\alpha_2}{2}}{\frac{\alpha_2^0 \pi}{180^0} - \sin \alpha_2}. \quad (2)$$

Площадь сегментов определяется по формуле

$$F_i = \frac{R_i^2}{2} \left(\frac{\alpha_i^0 \pi}{180^0} - \sin \alpha_i \right). \quad (3)$$

Моменты инерции круговых сегментов относительно осей $Z_1 - Z_1$ и $Z_2 - Z_2$ подсчитываем по формуле

$$I_{z_i} = \frac{R_i^4}{8} \left(\frac{\alpha_i^0 \pi}{180^0} - 0,5 \sin 2\alpha_i \right). \quad (4)$$

Моменты инерции сегментов относительно их центральных осей $Z_{ц1} - Z_{ц1}$ и $Z_{ц2} - Z_{ц2}$ будут равны

$$I_{z_{ц}} = I_{z_i} - F_i (O_i C_i)^2. \quad (5)$$

Искомые моменты инерции относительно оси $Z - Z$ всех трех участков сечения определяем соотношениями

$$I_z^I = I_{z_{ц1}} - F_1 (OC_1)^2, \quad I_z^{II} = I_{z_{ц2}} - F_2 (OC_2)^2, \quad (6)$$

$$I_z^{III} = \frac{bh^3}{12}.$$

Момент инерции всего сечения равен:

$$I_z = I_z^I + I_z^{II} + I_z^{III}. \quad (7)$$

Моменты сопротивления 1-го и 2-го сегментов относительно оси $Z - Z$ получим, разделив значения I_z^I и I_z^{II} на OD_1 и OD_2 соответственно:

$$W_z^I = \frac{I_z^I}{OD_1}, \quad W_z^{II} = \frac{I_z^{II}}{OD_2}. \quad (8)$$

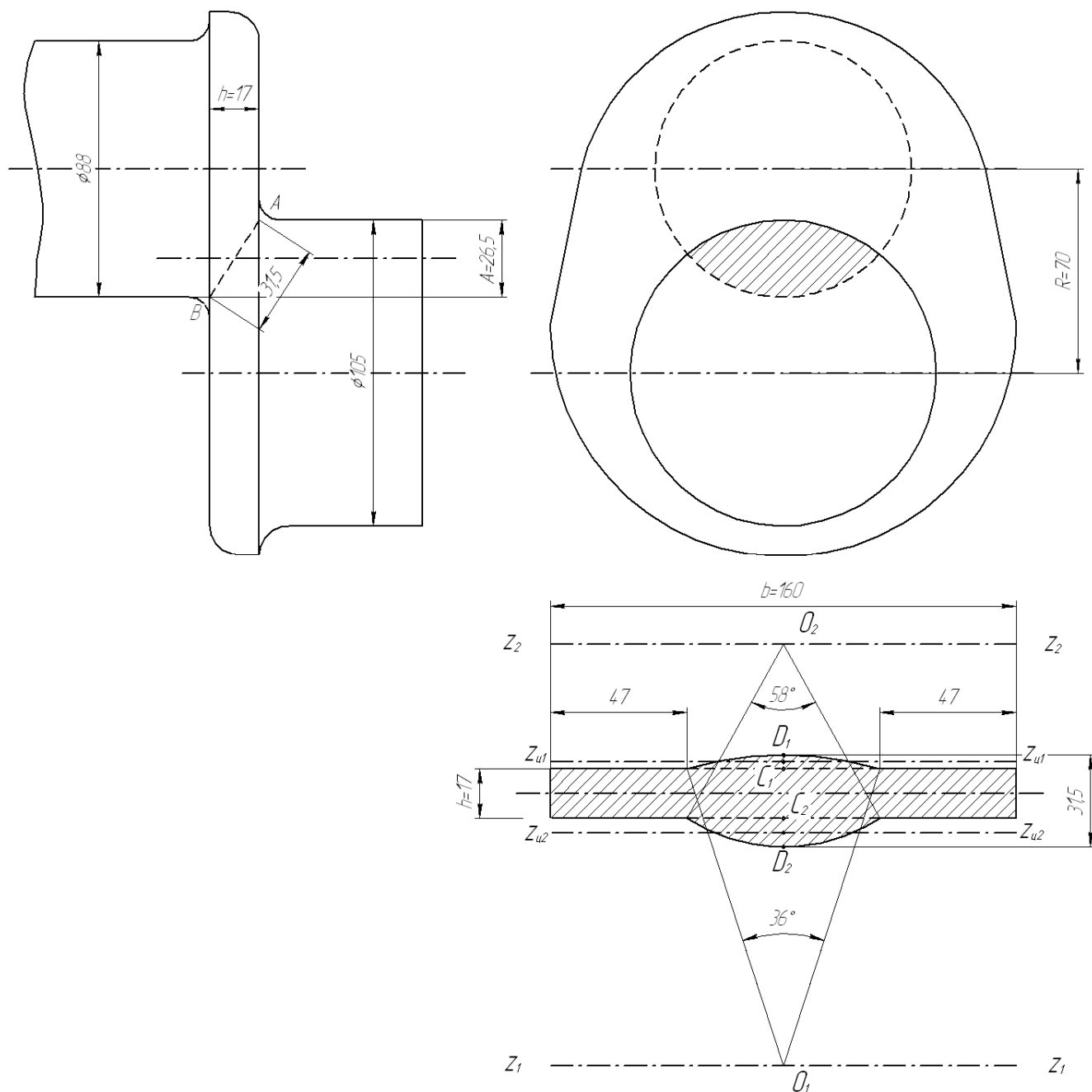


Рисунок 1 – К определению моментов сопротивления сечений щеки с учетом перекрытия шеек вала

Сложные напряжения в расчетных сечениях шеек вала и в точках посередине сторон сечения щек определяются по третьей теории прочности

$$\sigma_{сл} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (9)$$

Кроме того, для расчетных сечений щек определяются напряжения в угловых точках (1, 2, 3 и 4) и в точке t , находящейся посередине широкой стороны сечения щеки по формулам:

$$\begin{cases} \sigma_1 = -\sigma_{\text{щ}}^z + \sigma_{\text{щ}}^T - \sigma_{\text{щ}}^{z'}, \\ \sigma_2 = \sigma_{\text{щ}}^z + \sigma_{\text{щ}}^T - \sigma_{\text{щ}}^{z'}, \\ \sigma_3 = -\sigma_{\text{щ}}^z - \sigma_{\text{щ}}^T - \sigma_{\text{щ}}^{z'}, \\ \sigma_4 = \sigma_{\text{щ}}^z - \sigma_{\text{щ}}^T - \sigma_{\text{щ}}^{z'}, \\ \sigma_t = -\sigma_{\text{щ}}^z + \mathbf{0} - \sigma_{\text{щ}}^{z'}. \end{cases} \quad (10)$$

где $\sigma_{\text{щ}}^z$ и $\sigma_{\text{щ}}^T$ - нормальные напряжения изгиба щек в плоскости кривошипа и в перпендикулярной плоскости,

$\sigma_{\text{щ}}^{z'}$ - напряжения растяжения-сжатия щек.

Запасы прочности определяются для всех элементов вала при изгибе и кручении:

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_{\sigma}}{\varepsilon'_{\sigma}\varepsilon''_{\sigma}}\sigma_a + \alpha_{\sigma}\sigma_m}, \quad n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_{\tau}}{\varepsilon'_{\tau}\varepsilon''_{\tau}}\tau_a + \alpha_{\tau}\tau_m} \quad (11)$$

где $\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$ - амплитуда напряжений,

$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$ - среднее значение напряжений.

Общий запас прочности:

$$n = \frac{n_{\sigma}n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} \quad (12)$$

Следует заметить, что при определении запасов прочности рассматривается t угловых перемещений коленчатого вала.

Величины коэффициентов концентрации k_{σ} и k_{τ} , коэффициентов, учитывающих масштабный и технологический факторы ε'_{σ} , ε'_{τ} , ε''_{σ} , ε''_{τ} , а также коэффициентов α_{σ} и α_{τ} , характеризующих влияние асимметрии цикла на предел выносливости (σ_{-1} или τ_{-1}), определяются в зависимости от конструкции вала по [1 - 3].

Литература

1. Вихерт М. М. и др. Конструкция и расчет автотракторных двигателей. М.: Машиностроение, 1964.
2. Серенсен С. В. и др. Валы и оси. М.: Машиностроение, 1970.
3. Лейкин А. С. Напряженность и выносливость деталей сложной конструкции. М.: Машиностроение, 1968.

ВЛИЯНИЕ НА ДЕМПФИРОВАНИЕ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ МОТОРНЫХ УСТАНОВОК РЯДА ФАКТОРОВ

Студент Шевелёв М. А., Попович В. С. – д. т. н. профессор.

Алтайский государственный технический университет им. И. И. Ползунова. (г. Барнаул)

В основу известной линейной методики расчёта резонансных крутильных колебаний, предложенной Видлером, положен обобщённый коэффициент линейного (вязкого) демпфирования k_0 . Численная величина этого коэффициента в конкретной моторной установке может быть сравнительно просто определена экспериментальным путём. Для этого следует воспользоваться соотношением

$$k_0 = \frac{\lambda \cdot M_n}{\mu \cdot \omega \cdot \Phi_{1 \text{ абс}}}$$

и подставить в него величину $\Phi_{1\text{abc}}$, определенную торсиографированием вала этой установки во время работы её на критической частоте вращения.

Принимая в уравнении энергетического баланса гистерезисные потери демпфирования крутильных колебаний, которые определяются опытным значением коэффициента a_0 на основании соотношения

$$a_0 = \frac{\lambda \cdot M_n}{v \cdot \Phi_{1\text{abc}}^{q-1}}$$

Обобщенные коэффициенты a_0 и k_0 , являясь характеристиками демпфирования, зависят от изменения режимов работы двигателя и, тем более, при изменении конструктивных характеристик моторной установки.

Для выяснения влияния нагрузочного и скоростного режимов двигателя на величины обобщенных коэффициентов a_0 и k_0 при анализе резонансных колебаний вала используем представленные выше выражения.

Влияние нагрузки двигателя в пределах от холостого хода до максимального при постоянной частоте вращения вала n , равной одной из критических

$$n = n_{\text{кр}} = \frac{N}{h},$$

$$\text{где } h - \text{порядок критического числа оборотов, а } N = \frac{30 \cdot \omega}{\pi}.$$

Обобщенные коэффициенты демпфирования a_0 и k_0 меняются при изменении амплитуды возбуждающих моментов M_n . Амплитуды возбуждающих моментов M_n каждого порядка h возрастают с увеличением среднего индикаторного давления p_i в цилиндре.

Следовательно, при изменении нагрузки двигателя (во время работы его на каком-либо определенном критическом числе оборотов) обобщенные коэффициенты демпфирования a_0 и k_0 не остаются постоянными: коэффициент k_0 возрастает, а коэффициент a_0 убывает с увеличением p_i .

Это влияние p_i на коэффициент k_0 будет тем более сильным, а на коэффициент a_0 тем более слабым, чем больше, например, коэффициент b_2 , то есть чем ниже частота свободных колебаний вала установки ω , тем больше a , q и отношение $\frac{\lambda}{\mu^2}$. Но легко видеть, что это последнее отношение обычно имеет максимальную величину для главных порядков h , когда геометрическая сумма относительных амплитуд φ_i превращается в сумму алгебраическую (или арифметическую, если узел колебаний находится вне двигателя).

Таким образом, влияние изменения нагрузки двигателя на обобщенный коэффициент k_0 будет наиболее сильным, а на коэффициент a_0 наиболее слабым в установках с многоцилиндровыми двигателями с большими массами и длинным валом, во время работы их на главных критических числах оборотов.

Отсюда уже следует, в частности, что указанная поправка Портера совершенно случайна по своей абсолютной величине и не имеет и не может иметь сколько-нибудь универсального значения.

При изменении скоростного режима двигателя и порядка h критических чисел оборотов имеет место переход с одного критического числа оборотов $n_{\text{кр}}$ на другое $n'_{\text{кр}}$ и затем достаточно длительное время работы на этом новом критическом числе оборотов. При этом переходе изменится порядок резонирующих гармонических моментов от

$$h = \frac{N}{n_{\text{кр}}} \text{ до } h' = \frac{N}{n'_{\text{кр}}}$$

Сопоставим два случая резонансных колебаний вала какой-либо моторной установки: по одноузловой форме, с некоторой амплитудой $\Phi_{1\text{abc}}$ и по двухузловой форме, с той же амплитудой $\Phi_{1\text{abc}}$.

Детальное сравнение величины k_0 или a_0 при одноузловых и двухузловых колебаниях можно провести только на основании конкретных числовых расчётов для конкретной моторной установки. Поэтому ограничимся здесь только следующими замечаниями.

Достаточно справедливо условие, что при двухузловых колебаниях вала какой-либо установки с некоторой амплитудой $\Phi_{1\text{abc}}$ коэффициент k_0 будет меньше, а коэффициент a_0 больше, чем значения этих коэффициентов при одноузловых колебаниях.

Детальное исследование вопроса об обобщённых характеристиках демпфирования крутильных колебаний в моторных установках с поршневыми двигателями можно успешно провести в общем виде, без привлечения большого экспериментального материала и без громоздкого численного анализа ряда типичных конкретных случаев.

Обобщённые коэффициенты демпфирования k_0 и a_0 , используемые в расчётах по методикам Видлера и Льюиса (а так же К. Вильсона) не являются константами даже для одной и той же установки. Они меняются уже при изменении скоростного или нагрузочного режимов двигателя, при переходе двигателя с одноузловых колебаний на двухузловые или с главных критических скоростей на второстепенные.

Эти коэффициенты слишком непостоянны, чтобы иметь универсальное значение и сколько-нибудь надёжно характеризовать демпфирование в моторных установках. Именно поэтому расчёты резонансных крутильных колебаний по методам Видлера, Льюиса, К. Вильсона, основанные на использовании “опытных” значений обобщённых коэффициентов k_0 и a_0 , полученных торсиографированием установок “аналогичных” или “подобных” рассчитываемой, лишь в редких случаях дают удовлетворительные результаты.

Накопление большого числа опытных данных путём торсиографирования даже большого числа разнообразных моторных установок не обеспечит повышения точности наших расчётов из-за неизбежного (и обязательного) большого “разброса” этих данных.

Будет значительно более полезным проведение экспериментальных и теоретических исследований линейного демпфирования в моторных установках и накопление опытных данных отдельно по действительным коэффициентам вязкого (линейного) и гистерезисного демпфирования k_0, a_0 и q . Только этот путь может привести к заметному повышению точности расчёта резонансных крутильных колебаний по сравнению с точностью, достижимой в настоящее время.

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ

Ильинский Д.И. – студент, Бусыгин В.Г. – к.т.н., доцент
Алтайский государственный технический университет (г. Барнаул)

Шарнирно-стержневые системы (ШСС) широко используются в практических расчетах. Они применяются в качестве расчетных схем ферм. Теория кинематического анализа ШСС проста, но достаточно полно разработана только для геометрически неизменяемых систем. Анализ геометрически изменяемых и мгновенно изменяемых систем в литературе освещен слабо. В данном докладе сделана попытка алгебраического анализа и изучения свойств именно таких особых классов стержневых систем.

При кинематическом анализе стержневых систем предполагается, что стержни являются абсолютно жесткими, т.е. упругие деформации стержней отсутствуют. Тогда кинематический анализ ШСС определяется характером решений двух векторных уравнений $AN = p$ и $A^T q = 0$. Первое уравнение является уравнением равновесия узлов системы, второе - геометрическим уравнением в предположении отсутствия упругих деформаций. Вектор N состоит из значений продольных сил в стержнях, вектор q - из перемещений узлов системы, вектор p - из значений внешних узловых сил. Матрица A составляется по направлениям возможных упругих перемещений узлов системы.

Примечательным является наличие одной и той же матрицы A как в уравнении равновесия, так и в геометрическом уравнении, причем матрицы этих уравнений взаимно транспонированные. В этом состоит проявление общей закономерности (статико-геометрической аналогии). Аналогичная закономерность существует и во многих других задачах механики.

Матрица A имеет n строк и m столбцов, при этом $n = 2U - C_{оп}$, $m = C$, где U – количество узлов ШСС, $C_{оп}$ – количество опорных связей, C – количество стержней.

Доказывается, что квадратной невырожденной матрице A соответствует статически определимая и геометрически неизменяемая система. Квадратной вырожденной матрице A соответствуют геометрически изменяемые, в том числе и мгновенно изменяемые, статически неопределимые системы. Обычно подсчитываемое при кинематическом анализе число степеней свободы таких систем равно нулю и не отражает возможных перемещений узлов геометрически изменяемой системы, поэтому вводится понятие реального числа степеней свободы, равного дефекту матрицы A . Показано, что реальное число степеней свободы и степень статической неопределимости ШСС с квадратной матрицей совпадают. Доказывается возникновение очень больших внутренних усилий в мгновенно изменяемой системе при действии сколь угодно малой нагрузки.

Получено условие разрешимости $V^T p = 0$ уравнения равновесия из принципа возможных перемещений, где V – матрица фундаментальной системы решений геометрического уравнения. Механический смысл этой формулы состоит в том, что работа внешних узловых сил на любых возможных перемещениях узлов системы равна нулю. Данное условие накладывает ограничения на компоненты вектора p : одна часть компонент вектора может быть выражена через другие компоненты, соответствующие базисным строкам матрицы A . Это условие позволяет получить общую формулу связи компонент вектора p в случае, если равновесие в геометрически изменяемой системе существует.

Показано, что в случае прямоугольной матрицы A ранга r ($n > m$) имеем геометрически изменяемую систему. Получено условие статической определимости некоторого подкласса таких систем.

Теоретические положения подтверждены расчетами конкретных систем. Анализ матриц проводился с помощью пакета MathCAD.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОГИБОВ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ МЕТОДОМ ВЛАСОВА-КАНТОРОВИЧА

Ильинский Д.И. – студент, Бусыгин В.Г. – к.т.н., доцент
Алтайский государственный технический университет (г. Барнаул)

Тонкие жесткие пластины (пластины Кирхгоффа) служат распространенной расчетной схемой при анализе прочности, устойчивости и колебаний элементов строительных и машиностроительных конструкций. Определение прогибов пластин является важнейшей задачей, так как функция прогиба определяет все факторы напряженного состояния пластины [1].

Рассматривается задача определения функции прогиба прямоугольной пластины с одним свободным краем, остальные края – жестко защемлены (рисунок 1). Пластина нагружена по всей площади равномерно распределенной нагрузкой q . Коэффициент Пуассона принят равным $\nu = 1/6$.

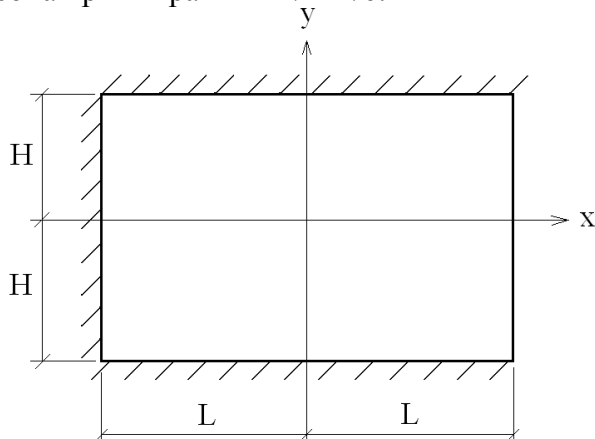


Рисунок 1 – Прямоугольная пластина, имеющая защемление по трем сторонам и свободный край

Точное аналитическое решение этой задачи в замкнутом виде неизвестно. Приближенное решение можно получить аналитическими и численными методами. Преимуществом аналитического решения является получение гладкой функции прогиба, а не набор её дискретных значений, как в численном решении. Знание функции позволяет без труда определить прогиб любой точки пластины и внутренние усилия. Кроме того, расчет пластины численными методами приводит, как правило, к системе уравнений высокого порядка и требует использования соответствующей компьютерной программы.

Рассмотрим группу приближенных аналитических методов расчета прямоугольных пластин. Методы Навье и Леви не подходят для решения указанной выше задачи, так как они требуют шарнирного опирания края пластины. Использование метода Бубнова-Галеркина затруднено подбором таких координатных функций, которые удовлетворяли бы всем граничным условиям. Поэтому для решения данной задачи был выбран вариационный метод Власова-Канторовича [1].

Согласно методу Власова-Канторовича функция прогиба представляется (в простейшем варианте метода) в виде $w(x,y) = f(x) \cdot \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ – заданная функция, а $f(x)$ – функция, вид которой предстоит определить. Функция $\varphi(y)$ должна удовлетворять соответствующим граничным условиям. Затем разложение для прогиба подставляется в выражение для потенциальной энергии пластины. В результате получаем функционал, из условия стационарности которого получаем обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка для функции $f(x)$. Решая дифференциальное уравнение, находим функцию $f(x)$ и, следовательно, прогиб $w(x,y)$.

Примем функцию $\varphi(y)$ в виде $\varphi(y) = (1 - y^2/H^2)^2$. Эта функция определяет прогиб балки, защемленной по концам, от действия равномерно распределенной нагрузки. Тогда характеристическое уравнение дает две пары комплексно-сопряженных корней, а искомая функция $f(x)$ примет вид суммы произведений тригонометрических и гиперболических функций с неизвестными константами. Для нахождения упомянутых констант воспользуемся граничными условиями жесткого защемления края слева и свободного края справа. Поскольку нас интересует максимальный прогиб, то после подстановки констант при $L=H$ и $x=L$ получаем $w(L,0) = 0,0415 qH^4/D$, что составляет 78 % от значения, указанного в справочнике [2].

Попробуем уменьшить погрешность, взяв $\varphi(y) = \cos(\pi y/2H)$. В данном случае характеристическое уравнение имеет две пары кратных вещественных корней. Неизвестные константы найдем с помощью тех же граничных условий. Для случая $H=L$ и $\nu=1/6$ получаем $w(L,0) = 0,06203 qH^4/D$, что на 16% превышает значение, приведенное в [2]. Этот результат объясняется тем, что принятая функция удовлетворяет условию отсутствия прогиба на контуре, но не выполняется равенство нулю первой производной, что и приводит к завышению прогиба.

Заметим, что значение максимального прогиба, вычисленное для квадратной пластины по справочнику [2], превышает соответствующее значение практически с тем же коэффициентом Пуассона в справочнике [3] на 19%.

Большинство вычислений, в том числе и символьного вида, производилось с помощью пакета MathCAD.

Литература.

1. Образцов, И.Ф. Строительная механика летательных аппаратов: Учебник для авиац. спец. вузов/ И.Ф. Образцов, Л.А. Булычев, В.В. Васильев и др.; Под. ред. И.Ф. Образцова. - М.: Машиностроение, 1986. – 536 с.

2. Прочность, устойчивость, колебания: Справочник в трех томах. Т. 1/ Под общей ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – 831 с.

3. Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений. Расчетно-теоретический. В двух книгах. Кн. 2 / Под ред. А.А.Уманского. – М.: Стройиздат, 1973. – 416 с.

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ЗАЗОРОВ НА СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МНОГОМАССОВЫХ СИСТЕМ

Безсонов А.В., студент; Попович В.С., д.т.н., профессор
Алтайский государственный технический университет (г. Барнаул)

Учитывая большие трудности теоретического исследования многомассовых систем, большой объем вычислений, а так же то, что практическое значение имеют низкие собственные частоты, будем рассматривать упрощенную систему, с малым числом масс.

Упрощенная система должна быть динамически эквивалентной исходной по крайней мере в том, смысле, что соответствующие низкие частоты и формы свободных колебаний для упомянутых систем должны быть достаточно близкими.

Приведение и упрощение исходной системы без учета зазоров могут быть осуществлены по методам, изложенным в разделе А. Рассмотрим, для простоты, четырехмассовую систему, имеющую один зазор. Обозначим моменты инерции I_1, I'_1, I'_2, I_2 , жесткости участков – C_1, C_2 величину углового зазора – Δ

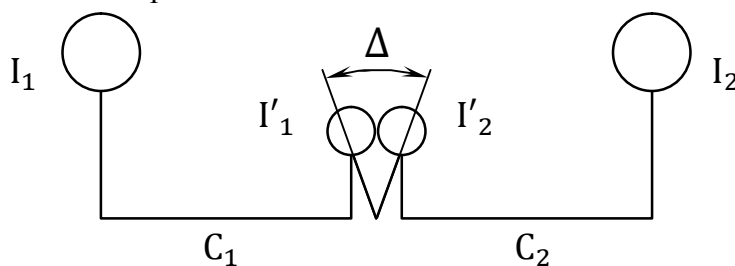


Рисунок 1 –
с зазором.

Схема системы

Система

дифференциальных уравнений свободных крутильных колебаний для этой системы, когда зазор свободен (нет касания масс с моментом инерции I'_1 и I'_2 , т.е. $|\psi_1 - \psi_2| < \Delta$), имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} I_1 \ddot{\varphi}_1 + C_1(\varphi_1 - \psi_1) &= 0; \\ I'_1 \ddot{\psi}_1 - C_1(\varphi_1 - \psi_1) &= 0; \\ I'_1 \ddot{\psi}_1 + C_2(\psi_2 - \varphi_2) &= 0; \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 - C_2(\psi_2 - \varphi_2) &= 0; \end{aligned} \right\} (1)$$

Где: $\varphi_1, \psi_1, \psi_2, \varphi_2$ – мгновенные углы поворота соответствующих масс.

Касание масс при замыкании зазора носит характер удара, время действия которого много меньше времени действия обычных сил (в нашем случае упругих сил кручения вала). Замыкание зазора будем считать происходящим одновременно с последующим размыканием (при упругом ударе).

Решение системы (1) является простым. Соударения масс I_1 и I_2 происходит при условии $|\psi_1 - \psi_2| = \Delta$ с угловыми скоростями $\dot{\psi}_1$ и $\dot{\psi}_2$ до удара, $\bar{\dot{\psi}}_1$ и $\bar{\dot{\psi}}_2$ – после удара.

По известному закону сохранения кинетического момента до и после удара (так как внутренние силы – силы соударения не изменяют кинетического момента всей системы) имеем

$$I = I_1 \dot{\varphi}_1 + I'_1 \dot{\psi}_1 + I'_2 \dot{\psi}_2 + I_2 \dot{\varphi}_2 = I_1 \bar{\dot{\varphi}}_1 + I'_1 \bar{\dot{\psi}}_1 + I'_2 \bar{\dot{\psi}}_2 + I_2 \bar{\dot{\varphi}}_2 \quad (2)$$

Так как колебания системы с зазорами допускает многократные соударения, то энергия, потерянная при ударе двух масс, может частично восполняться через упругие моменты,

другими телами системы до тех пор, пока в системе не исчезнут всякие относительные движения.

Теоретический анализ свободных крутильных колебаний в многомассовой системе с зазорами имеет свои особенности, поскольку зазоры всегда уменьшают абсолютную величину упругой закрутки $|\varphi_1 - \varphi_2|$ и $|\varphi_2 - \varphi_3|$ для трехмассовой системы. Необходимо предусмотреть смену знаков зазоров Δ_1 и Δ_2 .

УЧЕТ КОНСТРУКТИВНЫХ РАЗМЕРОВ ЭЛЕМЕНТОВ КОЛЕНЧАТОГО ВАЛА ПРИ РАСЧЕТЕ ПО НЕРАЗРЕЗНОЙ СХЕМЕ

Заречнев Р.А – студент, Попович В.С. – д.т.н., профессор
Алтайский государственный технический университет (г. Барнаул)

При расчете коленчатого вала как статически неопределимой системы по методу Тимошенко – Трапезина за «лишние» неизвестные принимаются надпорные моменты. За основную систему выбирается коленчатый вал, опертый на две опоры (статически определимая система). При этом придерживаемся следующего порядка. Статическая сторона задачи заключается в составлении уравнения равновесия системы. Геометрическая сторона рассматривает систему в деформированном состоянии, устанавливая связи между деформациями или перемещениями элементов конструкций – уравнения совместности деформаций. Для раскрытия статической неопределимости многоопорного коленчатого вала кроме условия равновесия системы необходимо определение угловых деформаций надпорных сечений, которые определяются графо-аналитическим методом. Согласно этого метода кривошип вала нагружается распределенной фиктивной нагрузкой интенсивностью, равной отношению изгибающего момента в данном сечении к жесткости. Реакции опор от этой фиктивной нагрузки и дают численную величину углов поворота концевых сечений балки. Кратко изложим основные положения метода, как наиболее распространенного.

Проектируя все моменты сначала на ось y_{n-1} , а затем на ось z_{n-1} , получим равенства:

$$\left. \begin{aligned} M_n^l + M_n^r \cdot \cos \gamma_n - m_n^r \cdot \sin \gamma_n &= 0 \\ m_n^l + M_n^r \cdot \sin \gamma_n + m_n^r \cdot \cos \gamma_n &= 0 \end{aligned} \right\}$$

(1)

Условие непрерывности упругой линии на опоре даёт два других уравнения для раскрытия статической неопределимости.

Для кривошипа вала, углы поворота сечения, взятого над n -ой опорой, будут α_n^l и β_n^l , α_n^r и β_n^r .

Углы α и β , как доказывается в работе, могут быть представлены в виде векторов.

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n^l &= \alpha_n^r \cdot \cos \gamma_n + \beta_n^r \cdot \sin \gamma_n \\ \beta_n^l &= -\alpha_n^r \cdot \sin \gamma_n + \beta_n^r \cdot \cos \gamma_n \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Если в уравнение, вместо α и β , подставить их выражение через моменты и силы, то совместно с уравнениями получим систему из четырех уравнений, дающую возможность найти неизвестные надпорные моменты. После элементарных преобразований эту систему можно свести к двум уравнениям.

Углы поворота концевых опорных сечений пропорциональны соответствующим нагрузкам. Коэффициенты пропорциональности, численно равные углам поворота опорных сечений при единичных нагрузках, могут быть определены общеизвестными методами. Эти коэффициенты и используются нами для суждения о величине надпорных изгибающих моментов. Величины коэффициентов пропорциональности выражены нами через размеры элементов коленчатого вала при условии более четкого разграничения фиктивной нагрузки по элементам вала.

Из диаграммы фиктивной нагрузки при действии на кривошип силы Z определены коэффициенты пропорциональности U_1 (для левого сечения) и U_2 (для правого сечения).

Выражение для U_1 имеет вид:

$$U_1 = \frac{(l_{ку}^l + 2 \cdot h + l_{шш}) \cdot (l_{ку}^r + 2 \cdot h + l_{шш})}{48 \cdot l^2} \cdot \left\{ \frac{64}{\pi \cdot d_{ку}^4 \cdot E} \cdot \left[\frac{(l_{ку}^r)^3}{(l_{ку}^r + 2 \cdot h + l_{шш})} + \frac{(l_{ку}^l)^2 \cdot (l_{ку}^l + 3 \cdot l_{ку}^r + 12 \cdot h + 6 \cdot l_{шш})}{2 \cdot (l_{ку}^l + 2 \cdot h + l_{шш})} \right] + \frac{64 \cdot l_{шш}}{\pi \cdot d_{шш}^4 \cdot \lambda \cdot [1 - (\frac{\delta_{шш}}{d_{шш}})^4]} \cdot E \cdot \left[\frac{6 \cdot (l_{ку}^r + 2 \cdot h + l_{шш}) \cdot (l_{ку}^r + 2 \cdot h) + 2 \cdot (l_{шш})^2}{(l_{ку}^r + 2 \cdot h + l_{шш})} + 3 \cdot (l_{ку}^l + 2 \cdot h) \cdot \frac{[2 \cdot (l_{ку}^r + 2 \cdot h + l_{шш}) + l_{шш}] \cdot l_{шш} \cdot (3 \cdot l_{ку}^r + 6 \cdot h + 4 \cdot l_{шш})}{(l_{ку}^l + 2 \cdot h + l_{шш})} \right] + \frac{24}{h^2 \cdot b \cdot E} \cdot \left[\frac{3 \cdot ((l_{ку}^r)^2 + 6 \cdot l_{ку}^r \cdot h + 4 \cdot h^2)}{(l_{ку}^r + 2 \cdot h + l_{шш})} + \frac{3 \cdot (l_{ку}^l + h) \cdot (l_{ку}^l + 3 \cdot h + 2 \cdot l_{шш}) - h^2}{(l_{ку}^l + 2 \cdot h + l_{шш})} \right] + \frac{36 \cdot (d_{ку} + d_{шш} - 2 \cdot A)}{h^3 \cdot b \cdot E} \cdot \left[\frac{(l_{ку}^l + h) \cdot (l_{ку}^r + 3 \cdot h + 2 \cdot l_{шш})}{(l_{ку}^l + 2 \cdot h + l_{шш})} + \frac{(l_{ку}^r + h)^2}{(l_{ку}^r + 2 \cdot h + l_{шш})} \right] \right\}.$$

(3)

где $l_{ку}^l$ и $l_{ку}^r$ - длина коренной шейки соответственно слева и справа;

$l_{шш}$ - длина шатунной шейки;

h - толщина щеки;

$d_{ку}$ - диаметр коренной шейки;

$\delta_{шш}$ и $d_{шш}$ - внутренний и внешний диаметр шатунной шейки;

b - ширина щеки;

l - длина кривошипа;

A - перекрытие шеек вала;

E - модуль упругости материала первого рода;

G - модуль упругости материала второго рода.

Подобным образом получены коэффициенты пропорциональности при действии всех сил на кривошип коленчатого вала:

t_1 и t_2 - при нагружении колена центробежной силой инерции щек;

t'_1 и t'_2 - при нагружении колена центробежной силой противовеса, расположенного с правой стороны;

t''_1 и t''_2 - то же для противовеса с левой стороны;

C_1, C_2 и C''_1 и C''_2 - при нагружении колена составляющими надпорного момента в плоскости кривошипа;

V_1 и V_2 - при нагружении колена силой T ;

k_1, k_2 и k'_1, k'_2 - при нагружении колена составляющими надпорного момента в плоскости, перпендикулярной плоскости кривошипа;

S - при нагружении крутящим моментом.

Таблица 1-Коэффициенты пропорциональности

/n	№ п	Коэффиц иент ($\times 10^{-6}$)	По Трапезину			По приведенным формулам		
			Колена вала			Колена вала		
			1,2,5	3,6	4	1,2,5	3,6	4
1	2	3	4	5	6	7	8	

1	$U_1(\frac{1}{\kappa_2})$	0,246	3 0,28	3 0,26	3 0,33	0 0,34	6 0,31
2	$t_1(\frac{1}{\kappa_2})$	0,478	4 0,54	4 0,51	5 1,12	9 1,21	4 1,12
3	$t'_1(\frac{1}{\kappa_2})$	0,146	2 0,23	-	2 0,41	2 0,68	-
4	$t''_1(\frac{1}{\kappa_2})$	0,366	8 0,49	6 0,44	1 0,64	0 0,62	9 0,63
5	$C_1(\frac{1}{\kappa_2 \cdot cM})$	0,068	3 0,07	2 0,06	4 0,16	6 0,17	8 0,14
6	$C_2(\frac{1}{\kappa_2 \cdot cM})$	0,043	4 0,04	4 0,04	8 0,05	0 0,06	0 0,06
7	$U_2(\frac{1}{\kappa_2})$	0,246	3 0,26	3 0,28	3 0,33	7 0,29	7 0,29
8	$t_2(\frac{1}{\kappa_2})$	0,478	9 0,51	4 0,54	5 1012	5 1,00	5 1,00
9	$t'_2(\frac{1}{\kappa_2})$	0,366	6 0,33	-	1 0,64	1 0,75	-
0	$t''_2(\frac{1}{\kappa_2})$	0,146	7 0,19	0 0,24	2 0,41	2 0,39	4 0,39
1	$C'_1(\frac{1}{\kappa_2 \cdot cM})$	0,068	2 0,06	3 0,07	4 0,16	6 0,14	7 0,14
2	$C'_2(\frac{1}{\kappa_2 \cdot cM})$	0,043	4 0,04	4 0,04	8 0,05	2 0,05	2 0,05
3	$V_1(\frac{1}{\kappa_2})$	0,156	3 0,18	4 0,17	2 0,25	8 0,25	1 0,24
4	$k_1(\frac{1}{\kappa_2})$	0,057	1 0,06	2 0,05	2 0,12	2 0,11	1 0,08
5	$k_2(\frac{1}{\kappa_2})$	4 0,029	3 0,03	2 0,04	2 0,04	3 0,04	3 0,07
6	$V_2(\frac{1}{\kappa_2})$	0,229	2 0,24	4 0,25	4 0,28	7 0,25	5 0,25
7	$k'_1(\frac{1}{\kappa_2 \cdot cM})$	0,057	2 0,05	1 0,06	2 0,12	7 0,11	1 0,08
8	$k'_2(\frac{1}{\kappa_2 \cdot cM})$	4 0,029	2 0,04	3 0,03	2 0,04	7 0,03	7 0,03
9	$S_1(\frac{1}{\kappa_2 \cdot cM})$	0,011	0 0,01	0 0,01	7 0,00	67 0,00	67 0,00

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ ПРИ РАСЧЕТЕ КОЛЕНЧАТОГО ВАЛА ПО НЕРАЗРЕЗНОЙ СХЕМЕ

Крутских П. А., студент; Попович В. С., д.т.н., профессор
Алтайский государственный технический университет (г. Барнаул)

В уравнения для раскрытия статической неопределимости многоопорного коленчатого вала перед неизвестными надпорными моментами входят коэффициенты пропорциональности, отражающие геометрические размеры элементов вала. Для их определения необходимо знать угловые деформации (углы поворота) надпорных сечений кривошипов, которые определяются графоаналитическим методом. Этот метод состоит в том, что кривошип загружается распределенной фиктивной нагрузкой, интенсивность которой в каждом поперечном сечении кривошипа численно равна $M_{из} / B$, где $M_{из}$ – изгибающий момент и B – жесткость изгиба в данном сечении. Реакции опор от этой фиктивной нагрузки и определяют величину углов поворота концевых сечений кривошипа.

Схема сил и моментов, действующих на кривошип в его плоскости, приведена на рисунке 1. На диаграммах для сил Z , $S_{щ}$ и момента m^r нанесены сосредоточенные фиктивные силы, которые учитывают изгиб щёк. Их величина равна площадям эпюр изгибающих моментов для щёк, разделенным на жесткость.

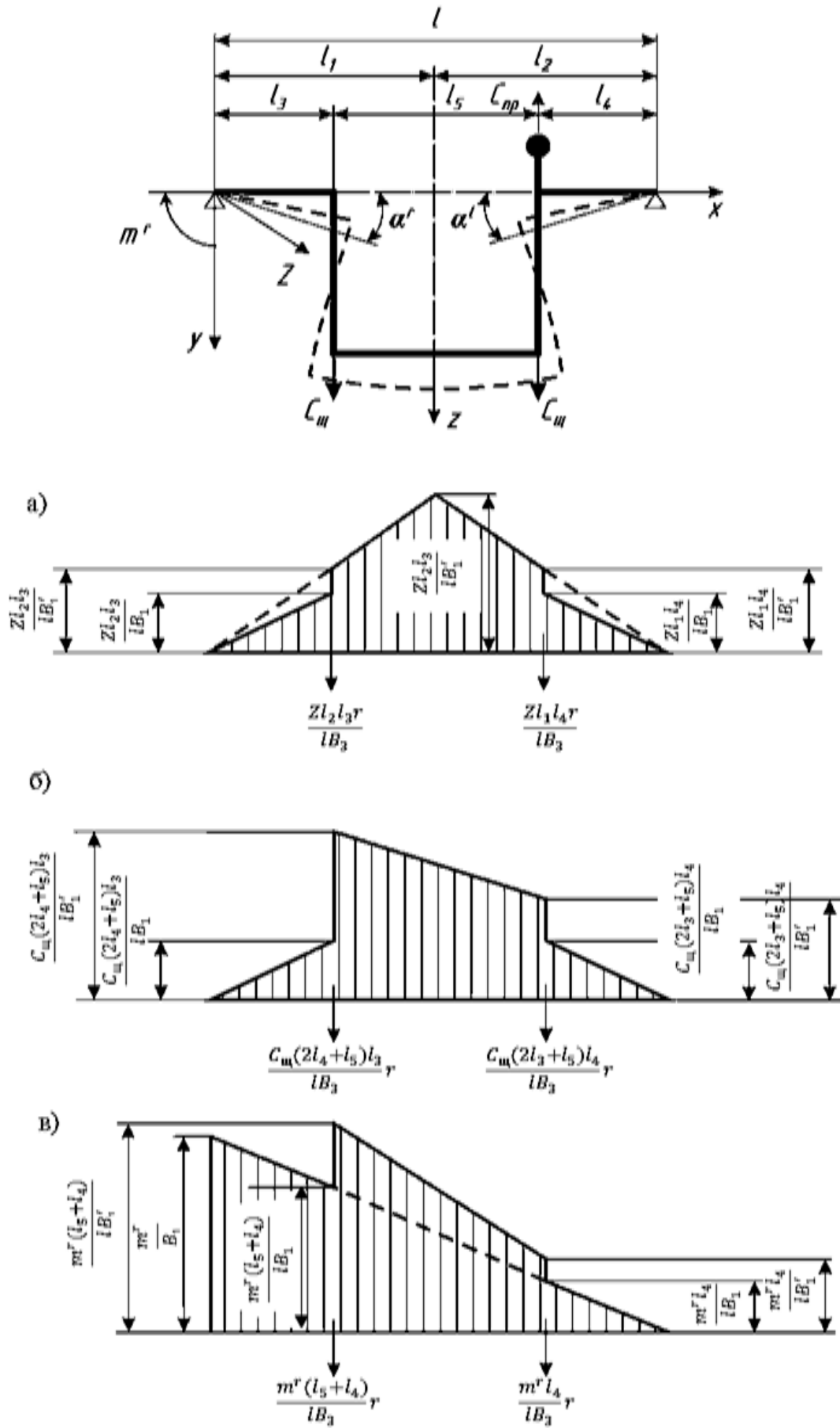


Рисунок 1 - Диаграммы фиктивных нагрузок от сил Z , C_{II} и момента m^r

Угол поворота левого надпорного сечения от действия на кривошип сил и моментов равен

$$\alpha^r = \alpha_1^r + \alpha_2^r + \alpha_2'^r + \alpha_2''^r + \alpha_3^r + \alpha_4^r = -Zu_1 + C_{щ} \cdot t_1 - C_{пп}^l \cdot t_1' - C_{пп}^r \cdot t_1'' + m^r c_1 - m^l c_2, \quad (1)$$

где коэффициенты пропорциональности определяются:

$$u_1 = \frac{l_1 l_2}{3l^2 B_1'} \left[l_2^2 + \frac{l_1}{2} (3l_2 + l_1) \right] + \frac{r}{l^2 B_3} [l_2 l_3 (l_4 + l_5) + l_1 l_4^2] - \left(\frac{1}{B_1'} - \frac{1}{B} \right) \frac{1}{3l^2} [l_1 l_4^3 + \frac{l_2 l_3}{2} (3l_4 + 3l_5 + l_3)] ; \quad (2) \quad t_1 = \frac{1}{3l^2 B_1'} [2l_1 l_4^3 + l_2 l_3^2 (3l_4 + 3l_5 + l_3)] + \frac{l_5}{6l^2 B_1'} [2l_1 (3l_4 + l_5) l_4 + 2l_2 l_3 (3l_4 + 2l_5)] + \frac{r}{l^2 B_3} [2l_2 l_3 (l_4 + l_5) + 2l_1 l_4^2] ;$$

(3)

$$t_1' = \frac{l_4}{3l^2 B_1'} [2l_3^2 (3l_5 + 3l_4 + l_3) + l_4^2 (l_5 + l_3)] + \frac{l_5 l_4}{6l^2 B_1'} [6l_2 l_3 + l_5 (3l_4 + l_5)] + \frac{r l_4}{l^2 B_3} [l_5 (l_3 + l_4) + 2l_3 l_4] ; \quad (4)$$

$$t_1'' = \frac{l_3}{3l^2 B_1'} [l_4^3 + 2l_3 (l_5 + l_4) (3l_4 + 3l_5 + l_3)] + \frac{l_5 l_3}{6l^2 B_1'} [6l_4 l_2 + l_5 (3l_4 + 2l_5)] + \frac{r l_3}{l^2 B_3} [l_4^3 + (l_5 + l_4)^2] ; \quad (5)$$

$$c_1 = \frac{l}{3B_1} + \frac{(l_4 + l_5)^3 - l_4^3}{3l^2} \left(\frac{1}{B_1'} - \frac{1}{B_1} \right) + \frac{(l_4 + l_5)^2 - l_4^2}{l^2 B_3} r ; \quad (6)$$

$$c_2 = \frac{l}{6B_1} + \left(\frac{1}{B_1'} - \frac{1}{B_1} \right) \frac{1}{6l^2} [(l_3 + l_5)^2 (l + 2l_4) - l_3^2 (3l_4 + 3l_5 + l_3)] + \frac{r}{l^2 B_3} [2l_3 l_4 + l_5 (l_3 + l_4)] ; \quad (7)$$

Для угла поворота правого надпорного сечения в плоскости кривошипа от всех нагрузок, приложенных к кривошипу, получим выражение

$$\alpha^l = \alpha_1^l + \alpha_2^l + \alpha_2'^l + \alpha_2''^l + \alpha_3^l + \alpha_4^l = Zu_2 - C_{щ} \cdot t_2 + C_{пп}^l \cdot t_2' + C_{пп}^r \cdot t_2'' - m^r c_2' + m^l c_1' , \quad (8)$$

где коэффициенты пропорциональности определяются:

$$u_2 = \frac{l_1 l_2}{3l^2 B_1'} \left[l_1^2 + \frac{l_2}{2} (3l_1 + l_2) \right] + \frac{r}{l^2 B_3} [l_1 l_4 (l_3 + l_5) + l_2 l_3^2] - \left(\frac{1}{B_1'} - \frac{1}{B} \right) \frac{1}{3l^2} [l_2 l_3^3 + \frac{l_1 l_4^2}{2} (3l_3 + 3l_5 + l_4)] ; \quad (9) \quad t_2 = \frac{1}{3l^2 B_1'} [2l_2 l_3^3 + l_1 l_4^2 (3l_3 + 3l_5 + l_4)] + \frac{l_5}{6l^2 B_1'} [2l_2 (3l_3 + l_5) l_3 + 2l_1 l_4 (3l_3 + 2l_5)] + \frac{r}{l^2 B_3} [2l_1 l_4 (l_3 + l_5) + 2l_2 l_3^2] ;$$

(10)

$$t_2' = \frac{l_4}{3l^2 B_1'} [l_3^3 + 2l_4 (l_5 + l_3) (3l_3 + 3l_5 + l_4)] + \frac{l_5 l_4}{6l^2 B_1'} [6l_3 l_1 + l_5 (3l_3 + 2l_5)] + \frac{r l_4}{l^2 B_3} [l_3^2 + (l_5 + l_3)^2] ; \quad (11)$$

$$t_2'' = \frac{l_3}{3l^2 B_1'} [6l_1 l_4 + l_5 (3l_3 + l_5)] + \frac{r l_3}{l^2 B_3} [l_5 (l_3 + l_4) + 2l_3 l_4] ; \quad (12)$$

$$c_2' = \frac{l}{6B_1} + \left(\frac{1}{B_1'} - \frac{1}{B_1} \right) \frac{1}{6l^2} [(l_4 + l_5)^2 (l + 2l_3) - l_4^2 (3l_3 + 3l_5 + l_4)] + \frac{r}{l^2 B_3} [2l_4 l_3 + l_5 (l_4 + l_3)] ; \quad (13)$$

$$c_1' = \frac{l}{3B_1} + \frac{(l_3 + l_5)^3 - l_3^3}{3l^2} \left(\frac{1}{B_1'} - \frac{1}{B_1} \right) + \frac{(l_3 + l_5)^2 - l_3^2}{l^2 B_3} r ; \quad (14)$$

Аналогичным образом построим ещё эпюры величин M_k / C , где M_k – крутящий момент, а C – жесткость при кручении.

На рисунке показана схема сил и моментов, действующих на кривошип в перпендикулярной плоскости.

Влияние скручивания шеек силой r и моментами M^r и M^l (их реакциями) на деформации шеек учитывается фиктивными сосредоточенными силами, численно равными площадям эпюр крутящих моментов для шеек, деленными на жесткость щеки при кручении. Кроме этого, имеет место изгиб шеек и кручение шатунной шейки от силы T и моментов M_r , M_{r+T} и M^r . Поэтому кроме эпюр величин M_{uz} / B следует построить ещё эпюры величин M_k / C , где M_k – крутящий момент, а C – жесткость при кручении.

Углы поворота надпорных сечений от силы T и момента M^r (без учета влияния изгиба шеек и кручения шатунной шейки) определяется как реакции от фиктивных нагрузок, углы же поворота надпорных сечений, вызванных изгибом шеек и кручением шатунной шейки, определяем при помощи правила Верещагина.

Угол поворота левого надпорного сечения от всех нагрузок, приложенных к колену:

$$\beta^r = \beta_T^r + \beta_{M^r}^r + \beta_{M^l}^r + \beta_{M_T}^r = -T \cdot v_1 + M^r k_1 - M^l k_2 + M_r s \quad (15)$$

где коэффициенты пропорциональности определяются:

$$v_1 = \frac{l_1 l_2}{3l^2 B_1'} \left[l_2^2 + \frac{l_1}{2} (3l_2 + l_1) \right] + \frac{r}{l^2 C_2} \left[l_2 l_3 (l_4 + l_5) + l_1 l_4^2 \right] - \left(\frac{1}{B_1'} - \frac{1}{B_1} \right) \frac{1}{3l^2} \times \\ \times \left[l_1 l_4^3 + \frac{l_2 l_3^2}{2} (3l_4 + 3l_5 + l_3) \right] - \frac{r^2}{l^2} \left[\frac{r}{3B_2} \left(l_2 - l_1 + \frac{3l}{2} \right) + \frac{l_5 l_2}{C_1'} \right]; \quad (16)$$

$$k_1 = \frac{l}{3B_1} + \frac{(l_4 + l_5)^3 - l_4^3}{3l^2} \left(\frac{1}{B_1'} - \frac{1}{B_1} \right) + \frac{(l_4 + l_5)^2 + l_4^2}{l^2 C_2} r + \frac{r}{l^2} \left(\frac{2}{3} \frac{r}{B_2} + \frac{l_5}{C_1'} \right); \quad (17)$$

$$k_2 = \frac{l}{6B_1} + \left(\frac{1}{B_1'} - \frac{1}{B_1} \right) \frac{(l_3 + l_5)(l + 2l_4) - l_3^2 (3l_4 + 3l_5 + l_3)}{6l^2} + \frac{r}{l^2 C_2} [2l_3 l_4 + l_5 (l_3 + l_4)] - \frac{r^2}{l^2} \left(\frac{2}{3} \frac{r}{B_2} + \frac{l_5}{C_1'} \right); \quad (18)$$

$$s = \frac{r}{l} \left(\frac{r}{B_2} + \frac{l_5}{C_1'} \right); \quad (19)$$

ПОДГОТОВКА ИСХОДНЫХ ДАННЫХ К РАСЧЕТУ КОЛЕНЧАТОГО ВАЛА ПО НЕРАЗРЕЗНОЙ СХЕМЕ

Чудов Д.С., студент, Попович В.С., д.т.н., профессор
Алтайский государственный технический университет (г. Барнаул)

Схема сил и моментов, действующих на отдельный i -й кривошип, приведена на рисунке 1.1. Здесь же показано и расположение координатных осей, плоскость кривошипа совпадает с плоскостью xy , а плоскость xz – перпендикулярна к плоскости кривошипа.

Исходными данными для определения сил Z и T , действующих на кривошпы коленчатого вала, являются силы давления газов в цилиндре и силы инерции от возвратно-поступательно движущихся масс кривошипно-шатунного механизма.

Сила Z , действующая на кривошип коленчатого вала по радиусу кривошипа, равна

$$Z = P_{\Sigma} \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta}, \quad (1.1)$$

где P_{Σ} – суммарная сила, полученная от сложения сил давления газов и сил инерции возвратно-поступательно движущихся масс, α – угол поворота коленчатого вала, β – угол отклонения продольной оси шатуна в плоскости его качания.

Тангенциальная сила T , действующая на кривошип коленчатого вала в перпендикулярной плоскости,

$$T = P_{\Sigma} \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}. \quad (1.2)$$

В многоцилиндровых двигателях значения сил z_i и T_i для других кривошипов получаются путём сдвига значения сил z_1 и T_1 на угол $\alpha_{1,i}$. Угол сдвига определяется в зависимости от порядка чередования вспышек в цилиндрах двигателя.

Суммарный крутящий момент на коренных шейках коленчатого вала равен

$$M_i^T = \left(\sum_{j=1}^N T_j \right) \cdot r, \quad (i = 2, n), \quad (1.3)$$

где n - число коренных шеек вала, N - число кривошипов вала, r - радиус кривошипа коленчатого вала.

Моменты, скручивающие шатунные шейки, определяются

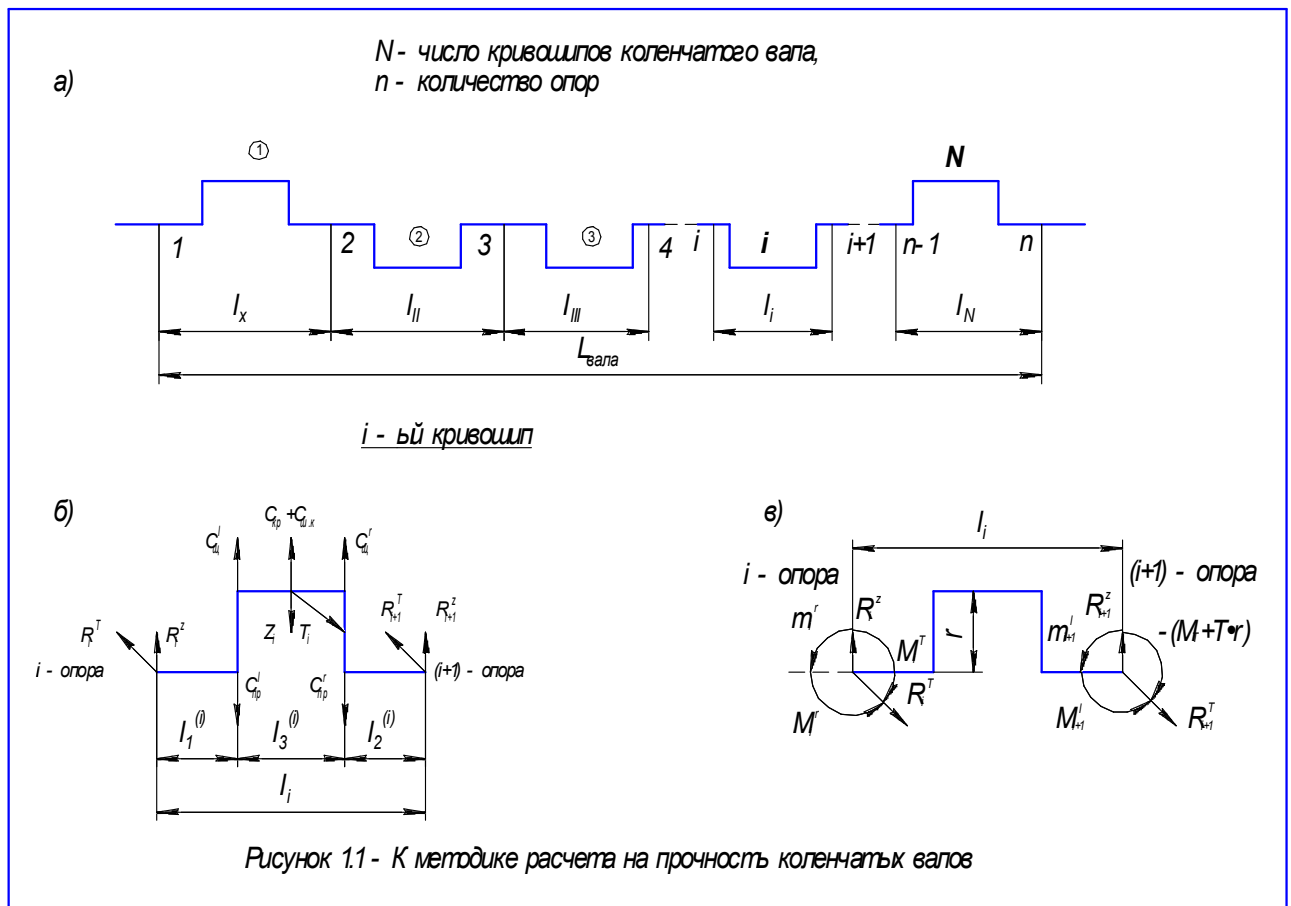
$$M_{\text{шши}i} = M_i^T + R_i^T \cdot r. \quad (1.4)$$

Значение реакции R_i^T на левой опоре i -го кривошипа от действия тангенциальной силы T_i ($i = \overline{1 \dots N}$)

$$R_i^T = \frac{T_i \left(\frac{l_3^{(i)}}{2} + l_2^{(i)} \right)}{l_i}, \quad (1.5)$$

где l_i - длина i -го кривошипа, $l_1^{(i)}$ - расстояние от левой опоры кривошипа до середины левой щеки, $l_2^{(i)}$ - расстояние от правой опоры до середины правой щеки, $l_3^{(i)}$ - расстояние между серединами щёк коленчатого вала.

На кривошип действуют центробежные силы масс щёк $C_{\text{щ}}$, противовесов $C_{\text{пр}}$, массы кривошипа $C_{\text{кр}}$ и части массы шатуна, отнесенной к кривошипу $C_{\text{ш.к}}$. Кроме того, в левом надпорном сечении кривошипа действует изгибающий момент в плоскости кривошипа m^r , изгибающий момент в плоскости, перпендикулярной плоскости кривошипа M^r . В сечении над правой опорой кривошипа соответствующие моменты обозначены через m^l , M^l .



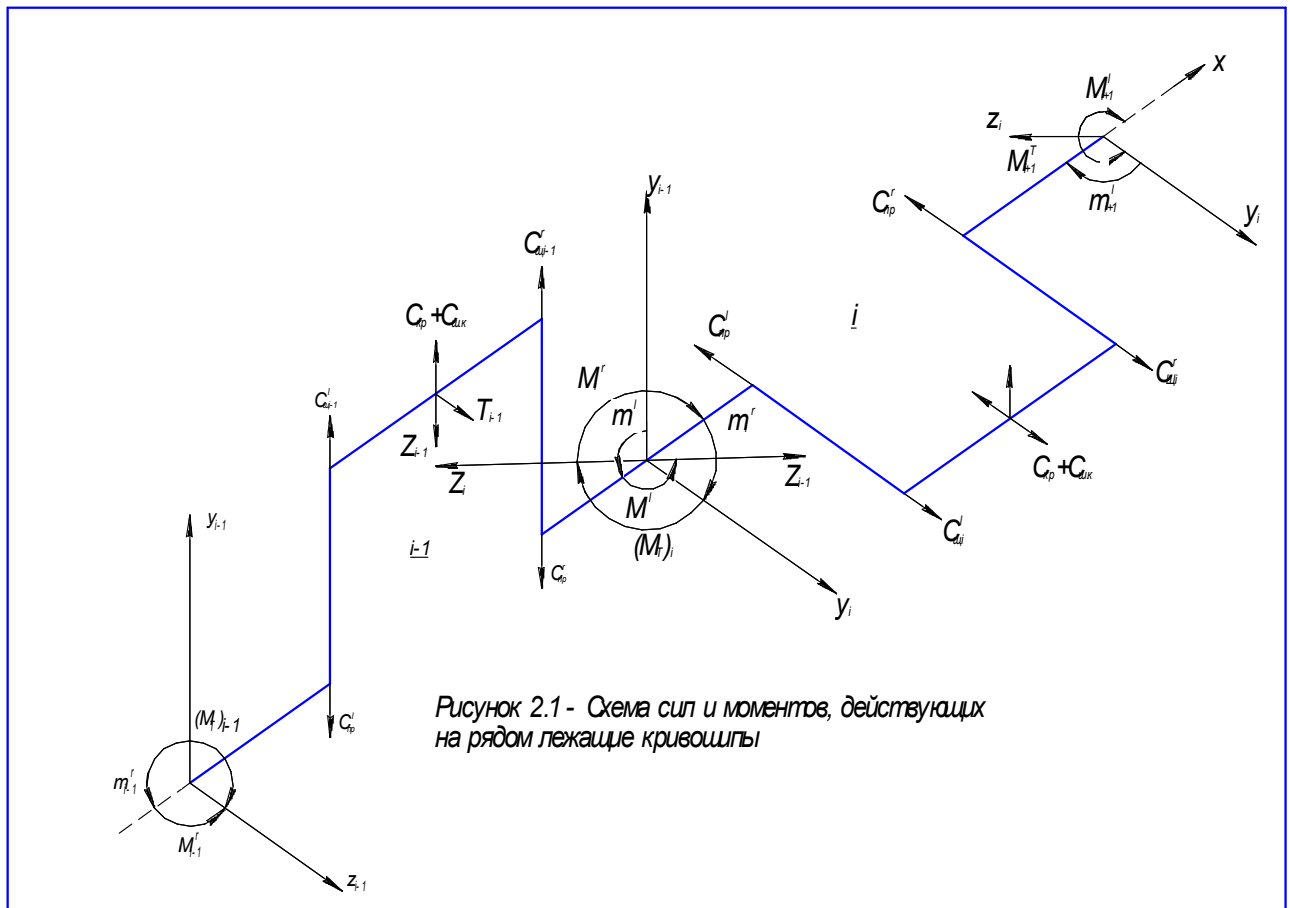


Рисунок 2.1 - Схема сил и моментов, действующих на рядом лежащие кривошпы

На рисунке 2.1 приведены два рядом лежащих кривошпы коленчатого вала со всеми силами и моментами, действующими на них. Угол между кривошпыми γ_i будем считать положительным, если он отложен по часовой стрелке от плоскости $(i - 1)$ -го кривошпы к плоскости i -го кривошпы, если смотреть вдоль продольной оси вала от носка.

В основу метода раскрытия статической неопределенности многоопорного сечения и непрерывности упругой линии вала положено два условия: условие равновесия опорного сечения и непрерывности упругой линии вала. Эти условия графически представлены на рисунках 2.2 и 2.3. Здесь через m_i обозначен изгибающий надпорный момент, действующий в плоскости кривошпы, а через M_i – изгибающий надпорный момент в плоскости, перпендикулярной плоскости кривошпы. Составляющие этих моментов снабжаются значками l , если сечение над опорой относится к кривошпы, лежащим левее опоры (m_i^l и M_i^l на рисунке 2.1), и значениями r , если сечение относится к кривошпы, лежащему правее опоры (m_i^r и M_i^r). Нижние индексы указывают номер опоры, над которой взято сечение.

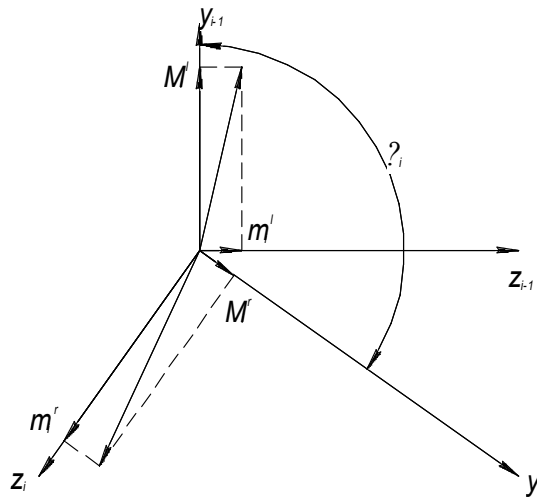


Рисунок 2.2 - Условие равновесия i -го опорного сечения

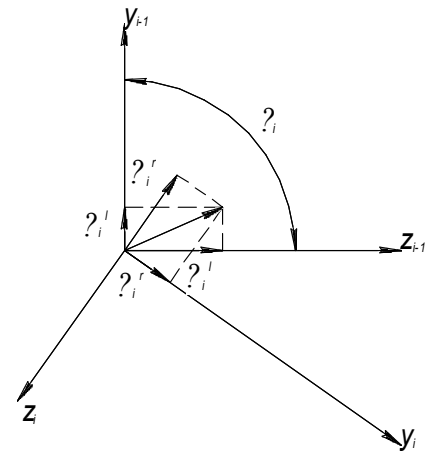


Рисунок 2.3 - Условие непрерывности упругой линии на i -ой опоре

Условие равновесия опорного сечения заключается в равенстве равнодействующего момента от m_i^l и M_i^l равнодействующему моменту от m_i^r и M_i^r , имеющему противоположное направление. Проектируя все моменты сначала на ось y_{i-1} , а затем на ось z_{i-1} , получим:

$$\begin{aligned} M_i^l + M_i^r \cos \gamma_i - m_i^r \sin \gamma_i &= 0, \\ m_i^l + M_i^r \sin \gamma_i + m_i^r \cos \gamma_i &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Условие непрерывности упругой линии на опоре, которое заключается в том, что изогнутая ось левой коренной шейки i -го колена представляет собой плавное продолжение изогнутой оси правой коренной шейки $(i-1)$ -го колена, дает два других уравнения для раскрытия статической неопределенности. Углы поворота i -го надопорного поперечного сечения относительно осей z_{i-1} и y_{i-1} обозначим через α_i^l и β_i^l , а относительно осей z_i и y_i через α_i^r и β_i^r . Из рисунка 2.3 имеем:

$$\alpha_i^l = \beta_i^r \sin \gamma_i + \alpha_i^r \cos \gamma_i, \quad \beta_i^l = \beta_i^r \cos \gamma_i - \alpha_i^r \sin \gamma_i. \quad (2.2)$$

РАСКРЫТИЕ СТАТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛИМОСТИ МНОГООПОРНОГО КОЛЕНЧАТОГО ВАЛА

Федотов А.С., студент, Попович В.С., д.т.н., профессор
Алтайский государственный технический университет (г. Барнаул)

Углы поворота i -го опорного сечения с учетом сил и моментов, действующих на два соседних кривошипа, равны соответственно:

$$\alpha_i^l = z_{i-1} U_{2,i-1} - C_{\text{щ}} \cdot t_{2,i-1} + C_{\text{пр}}^l \cdot t_{2,i-1} + C_{\text{пр}}^r \cdot t_{2,i-1}'' - m_{i-1}^r \cdot C_{2,i-1}' + m_i^l \cdot C_1'; \quad (2.3)$$

$$\beta_i^l = T_{i-1} \cdot V_{2,i-1} - M_{i-1}^r \cdot K_{2,i-1} + M_i^l \cdot K_{2,i-1}' + M_{T,i-1} \cdot S_{i-1};$$

для кривошипа, расположенного правее i -ой опоры

$$\alpha_i^r = -z_i \cdot U_{1,i} + C_{\text{щ}} \cdot t_{1,i} - C_{\text{пр}}^l \cdot t_{1,i}' - C_{\text{пр}}^r \cdot t_{1,i}' + m_i^r \cdot c_{1,i} - m_{i+1}^l \cdot c_{1,i}';$$

$$\beta_i^r = -T_i \cdot v_{1,i} + M_i^r \cdot K_{1,i} - M_{i+1}^l \cdot K_{1,i}' + M_{T,i} \cdot S_i. \quad (2.4)$$

Преобразуем уравнения (2.1) следующим образом:

$$\begin{aligned} m_i^r &= \frac{M_i^l + M_i^r \cdot \cos \gamma_i}{\sin \gamma_i}; & m_i^l &= -\frac{M_i^r + M_i^l \cdot \cos \gamma_i}{\sin \gamma_i}, \\ m_{i+1}^l &= -\frac{M_{i+1}^r + M_{i+1}^l \cdot \cos \gamma_{i+1}}{\sin \gamma_{i+1}} & m_{i-1}^r &= \frac{M_{i-1}^l + M_{i-1}^r \cdot \cos \gamma_{i-1}}{\sin \gamma_{i-1}}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

После некоторых подстановок и преобразований уравнений (2.2) – (2.5) получим систему двух уравнений для i -ой опоры

$$\left. \begin{aligned} & -c_{2,i-1} \cdot (M_{i-1}^l \cdot \varphi_1 + M_{i-1}^r \cdot \varphi_2) - c'_{1,i-1} \cdot (M_i^l \cdot \varphi_3 + M_i^r \cdot \varphi_4) - \\ & -c_{1,i} \cdot (M_i^l \cdot \varphi_3 + M_i^r \cdot \varphi_5) - K_{1,i} \cdot M_i^r \cdot \varphi_6 - c_{2,i} \cdot (M_{i+1}^l \cdot \varphi_7 + M_{i+1}^r \cdot \varphi_8) + \\ & + K_{2,i} \cdot M_{i+1}^l \cdot \varphi_6 = z_{i-1} \cdot U_{2,i-1} + c_{\text{щ}} \cdot t_{2,i-1} - c_{\text{пр}} \cdot t'_{2,i-1} - c_{\text{пр}} \cdot t''_{2,i-1} + \\ & + (z_i \cdot U_{1,i} + c_{\text{щ}} \cdot t_{1,i} - c_{\text{пр}} \cdot t'_{1,i} - c_{\text{пр}} \cdot t''_{1,i}) \cdot \varphi_9 - \\ & - (T_i \cdot V_{1,i} - M_{T_i} \cdot S_i) \cdot \varphi_6; \\ & -K_{2,i-1} \cdot M_{i-1}^r + c_{1,i} \cdot (M_i^l + M_i^r \cdot \varphi_9) + K'_{1,i-1} \cdot M_i^l - \\ & -K_{1,i} \cdot M_i^r \cdot \varphi_9 + c_{2,i} \cdot (M_{i+1}^l \cdot \varphi_{10} + M_{i+1}^r \cdot \varphi_{11}) + K_{2,i} \cdot M_{i+1}^l \cdot \varphi_9 = \\ & = T_{i-1} \cdot V_{2,i-1} - (T_i \cdot V_{1,i} - M_{T_i} \cdot S_i) \cdot \varphi_9 - M_{T_{i-1}} \cdot S_{i-1} - \\ & - (z_i \cdot U_{1,i} + c_{\text{щ}} \cdot t_{1,i} - c_{\text{пр}} \cdot t'_{1,i} - c_{\text{пр}} \cdot t''_{1,i}) \cdot \varphi_6. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Угловые коэффициенты взаимного расположения кривошипов коленчатого вала в уравнении (2.6) соответственно равны:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{\sin \gamma_{i-1}}; & \varphi_2 &= \frac{\cos \gamma_{i-1}}{\sin \gamma_{i-1}}; & \varphi_3 &= \frac{\cos \gamma_i}{\sin \gamma_i}; & \varphi_4 &= \frac{1}{\sin \gamma}; & \varphi_5 &= \frac{\cos^2 \gamma_i}{\sin \gamma_i}; & \varphi_6 &= \sin \gamma_i; \\ \varphi_7 &= \frac{\cos \gamma_{i+1}}{\sin \gamma_{i+1}}; & \varphi_8 &= \frac{\cos \gamma_i}{\sin \gamma_{i+1}}; & \varphi_9 &= \cos \gamma_i; & \varphi_{10} &= \frac{\cos \gamma_{i+1}}{\sin \gamma_{i+1}} \cdot \sin \gamma_i; & \varphi_{11} &= \frac{\sin \gamma_i}{\sin \gamma_{i+1}}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

В уравнениях (2.6) U, t, c, v, K, S – коэффициенты пропорциональности между углами поворота надпорных сечений и силовыми факторами, воздействующими на кривошип.

Таким образом для любой i -ой опоры ($i = \overline{2, N}$) можно написать два алгебраических уравнения, вид которых зависит от взаимного расположения кривошипов. Следует заметить, что в случае если $\gamma_i = 0$, уравнения (2.1) распадаются на два независимых равенства и уравнения (2.5) теряют свой смысл.

$$M_i^r = -M_i^l; \quad m_i^r = -m_i^l. \quad (2.1')$$

В этом случае надлежит пользоваться следующими уравнениями, предварительно выполнив замены M_i^r на $-M_i^l$ и m_i^r на $-m_i^l$.

$$\left. \begin{aligned} & c_{2,i-1} \cdot m_{i-1}^l + c'_{1,i-1} \cdot m_i^l + c_{1,i} \cdot m_i^l \cdot \varphi_9 + K_{1,i} \cdot M_i^l \cdot \varphi_6 + K_{2,i} \cdot M_{i+1}^l \cdot \varphi_6 = \\ & = z_{i-1} \cdot U_{2,i-1} + c_{\text{щ}} \cdot t_{2,i-1} - c_{\text{пр}} \cdot t'_{2,i-1} - c_{\text{пр}} \cdot t''_{2,i-1} + \\ & + (z_i \cdot U_{1,i} + c_{\text{щ}} \cdot t_{1,i} - c_{\text{пр}} \cdot t'_{1,i} - c_{\text{пр}} \cdot t''_{1,i}) \cdot \varphi_9 - \\ & - T_1 \cdot v_{1,i} \cdot \varphi_6 + (M_T)_i \cdot S_i \cdot \varphi_6; \\ & K_{2,i-1} \cdot M_{i-1}^l + K'_{1,i-1} \cdot M_i^l - (c_{1,i} \cdot m_i^l + c_{2,i} \cdot m_{i+1}^l) \cdot \varphi_6 + K_{1,i} \cdot M_i^l \cdot \varphi_9 + \\ & + K_{2,i} \cdot M_{i+1}^l \cdot \varphi_9 = -T_{i-1} \cdot v_{2,i-1} - (M_T)_{i-1} \cdot S_{i-1} - \\ & - (z_i \cdot U_{1,i} + c_{\text{щ}} \cdot t_{1,i} - c_{\text{пр}} \cdot t'_{1,i} - c_{\text{пр}} \cdot t''_{1,i}) \cdot \varphi_6 - T_i \cdot v_{1,i} \cdot \varphi_9 + (M_T)_i \cdot S_i \cdot \varphi_9. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Для многоопорного коленчатого вала, пользуясь уравнениями (2.6) или (2.8), составляется система уравнений для раскрытия статической неопределенности. Количество уравнений в системе равно $2(N - 1)$. Эту систему при условии, что расчет проводится для одного фиксированного углового положения вала, в матричном виде можно представить

$$K \cdot M = -A, \quad (2.9)$$

где K – матрица коэффициентов системы,

M – матрица-столбец неизвестных (надпорных изгибающих моментов),

A – матрица-столбец свободных членов.

Структура матриц M и A имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} M_2^l \\ M_2^r \\ \vdots \\ M_i^l \\ M_i^r \\ \vdots \\ M_{n-1}^l \\ M_{n-1}^r \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_{2(n-2)} \end{pmatrix}; \quad A_i = K_i^0 \cdot P_i^0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-2) \quad (2.10)$$

Элементы матрицы A представляют собой произведения матриц-строк коэффициентов свободных членов системы на матрицы-столбцы нагрузок. Ниже показано строение матриц-строк коэффициентов свободных членов K_i^0 и матриц-столбцов нагрузок P_i^0 . Для матриц нагрузок P_i^0 элементы являются нормальные z_i и тангенциальные T_i силы, крутящие моменты на корневых шейках вала M_{T_i} .

$$\begin{aligned} K_1^0 &= (U_{2,1} | U_{1,2} \cdot \varphi_9 | -v_{1,2} \cdot \varphi_6 | S_2 \cdot \varphi_6) \\ K_2^0 &= (v_{2,1} | -v_{1,2} \cdot \varphi_9 | -U_{1,2} \cdot \varphi_6 | -S_1 | S_2 \cdot \varphi_9) \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} K_{2(n-2)}^0 &= (v_{2,n-1} | v_{1,n} \cdot \varphi_9 | -U_{1,n} \cdot \varphi_6 | -S_{n-1} \cdot \varphi_6 | S_n \cdot \varphi_9) \\ P_1^0 &= \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ T_2 \\ M_{T_2} \end{pmatrix}; \quad P_2^0 = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ z_2 \\ M_{T_1} \\ M_{T_2} \end{pmatrix}; \quad P_{2(n-2)}^0 = \begin{pmatrix} T_{N-1} \\ T_N \\ z_N \\ M_{T_{N-1}} \\ M_{T_N} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Матрица коэффициентов системы K имеет вид представленный (2.13). Элементы этой матрицы, равные нулевым значениям, определяются соотношениями

$$K_{ij} = 0, \text{ при } \begin{cases} j < \frac{i}{2}; & \text{для } i - \text{четных,} \\ j < \frac{i-1}{2}; & \text{для } i - \text{нечетных,} \\ j < \left(\frac{n}{2} + 1\right) + \frac{i-1}{2}; & \text{для } i - \text{нечетных,} \\ j < \frac{n}{2} + \frac{i}{2}; & \text{для } i - \text{четных.} \end{cases}$$

Если система (2.9) рассчитывается для t угловых положений коленчатого вала, то коэффициенты системы (матрица K) остаются неизменными. В матрицах M и A каждому угловому положению вала будут соответствовать свои столбцы неизвестных надпорных моментов и свободных членов. В этом случае уравнение (2.9) будет иметь вид

$$K \cdot \bar{M} = -\bar{A}. \quad (2.9')$$

Матрицы \bar{M} и \bar{A} имеют структуру следующего вида:

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} M_2^{l(0)} & M_2^{l(1)} & \dots & M_2^{l(t-1)} \\ M_2^{r(0)} & M_2^{r(1)} & \dots & M_2^{r(t-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n-1}^{l(0)} & M_{n-1}^{l(1)} & \dots & M_{n-1}^{l(t-1)} \\ M_{n-1}^{r(0)} & M_{n-1}^{r(1)} & \dots & M_{n-1}^{r(t-1)} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

$\langle 2(n-1) \times t \rangle$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A_1^{(0)} & A_1^{(1)} & \dots & A_1^{(t-1)} \\ A_2^{(0)} & A_2^{(1)} & \dots & A_2^{(t-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_i^{(0)} & A_i^{(1)} & \dots & A_i^{(t-1)} \\ A_{2(n-2)}^{(0)} & A_{2(n-2)}^{(1)} & \dots & A_{2(n-2)}^{(t-1)} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

$\langle 2(n-1) \times t \rangle$

Надпорные изгибающие моменты, действующие в плоскости кривошипа, определяются

$$m = \beta \cdot M, \quad (2.16)$$

где

$$m = \begin{pmatrix} m_2^r \\ m_2^l \\ \vdots \\ m_i^r \\ m_i^l \\ \vdots \\ m_{n-1}^r \\ m_{n-1}^l \end{pmatrix}; \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \beta_i & \vdots \\ 0 & \dots & \beta_{n-1} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

$$\beta_i = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\cos \gamma_{i-1,i}}{\sin \gamma_{i-1,i}} \\ -\frac{\cos \gamma_{i-1,i}}{\sin \gamma_{i-1,i}} & -\frac{1}{\sin \gamma_{i-1,i}} \end{pmatrix} \quad (i = 2, \dots, n-1)$$

$$K = \begin{pmatrix} -c_{2,1}\varphi_1 - c_{2,1}\varphi_2 (c'_{1,1} + c_{1,2})\varphi_3 - c'_{1,1}\varphi_4 - c_{1,2}\varphi_5 + -c_{2,2}\varphi_7 + K_{2,2}\varphi_6 & -c_{2,2}\varphi_8 & 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ & +K_{1,2}\varphi_6 & & & \\ 0 & -K_{2,1} & (c_{1,2} + K'_{1,1}) & (c_{1,2} - K_{1,2})\varphi_9 & c_{2,2}\varphi_{11} + K_{2,2}\varphi_{10} & c_{2,2}\varphi_{12} & 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & -c_{2,2}\varphi_1 & -c_{2,2}\varphi_2 & (c'_{1,2} + c_{1,3})\varphi_3 & -(c'_{1,2}\varphi_{11} + & -(c_{2,3}\varphi_7 - K_{2,3}\varphi_6) & -c_{2,3}\varphi_8 & 0 \dots 0 \\ & & & & +c_{1,3}\varphi_5 - K_{1,3}\varphi_6) & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -K_{2,2} & (c_{1,3} + K'_{1,2}) & (c_{1,3} - K_{1,3})\varphi_9 & (c_{2,3}\varphi_{11} + K_{2,3}\varphi_{10}) & c_{2,3}\varphi_{12} & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & c_{2,i-1}\varphi_1 & -c_{2,i-1}\varphi_2 & (c'_{1,i-1} + c_{1,i})\varphi_3 & -c_{1,i-1}\varphi_4 - c_{1,i}\varphi_5 + & -(c_{2,i}\varphi_7 - K_{2,i}\varphi_6) & -c_{2,i}\varphi_8 & 0 \dots 0 \\ & & & & +K_{1,i}\varphi_6 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & K_{2,i-1} & (c_{1,i} + K'_{1,i-1}) & (c_{1,i} - K_{1,i})\varphi_9 & (c_{2,i}\varphi_{11} + K_{2,i}\varphi_{10}) & c_{2,i}\varphi_{12} & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -c_{2,n-1}\varphi_1 & -c_{2,n-1}\varphi_2 & (c'_{1,n-1} + c_{1,n})\varphi_3 & -c'_{1,n-1}\varphi_4 - c_{1,n}\varphi_5 + -c_{2,n}\varphi_7 + K_{2,n}\varphi_6 - c_{2,n}\varphi_9 & & \\ & & & & & & +K_{1,n}\varphi_6 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{2,n-1} & (c_{1,n} + K_{1,n-1}) & (c_{1,n} - K_{1,n})\varphi_9 & c_{2,n}\varphi_{11} + K_{2,n}\varphi_{10} & c_{2,n}\varphi_{12} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$