ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ГИДРОДИНАМИКА МЕМБРАННЫХ УСТАНОВОК

Л. В. Китаева, Ф. Ф. Спиридонов
Бийский технологический институт АлтГТУ, г. Бийск.

Аннотация. Рассматривается возможность практического применения дифференциальных уравнений для решения задач гидродинамики. Для случая предельно высоких значений характерного числа Рейнольдса сформулирована автомодельная задача, получена определяющая система дифференциальных уравнений в частных производных. Эта система может решаться численными методами. Получено интегрально-дифференциальное уравнение, описывающее поведение обобщенного решения. Это уравнение сведено к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению, интегрирование которого позволило получить выражение для отыскания параметра c в общем случае.

В курсе высшей математики рассматриваются линейные дифференциальные уравнения и системы уравнений первого и второго порядка с частными производными. Но некоторые физические процессы описываются нелинейными уравнениями, которые не рассматриваются из за их сложности. Однако рассмотрение таких процессов возможно для студентов некоторых специальностей.

Рассмотрим процесс очистки. В связи с необходимостью интенсификации процессов очистки жидкостей от примесей возникает потребность в применении мембранных каналов неосесимметричной формы. Гидромеханика таких каналов является пространственной – трехмерной. Рассматрим стационарные течения в цилиндрическом канале произвольного поперечного сечения, плотность жидкости ρ является величиной постоянной. Кроме того, полагаем, что скорость подвода жидкости со стенок является величиной постоянной и направлена по нормали к стенкам канала, подвод с переднего конца (z=0) отсутствует.

Тогда движение жидкости описывается следующей системой уравнений в безразмерном виде:

$$\begin{cases} div\ \bar{v} = 0, \\ (\bar{v}\bar{\nabla})\bar{v} = -\bar{\nabla}p + \dfrac{1}{Re_0}\Delta\bar{v}. \end{cases} \tag{1}$$

Граничные условия следующие:

на переднем конце канала: $\bar{v} = 0$,

на стенках канала: $\bar{v} = -\bar{n}$, (2)

где $\bar{v}$ - вектор скорости жидкости, $div, \bar{\nabla}$ - дифференциальные операторы дивергенции и Гамильтона, p- давление жидкости, $Re_0 = \rho V_0 l / \mu$ - характерное число Рейнольдса, l – некоторый характерный размер канала, μ - эффективный коэффициент динамической вязкости жидкости соответственно, V_0 - величина скорости протекания жидкости через стенки канала, $\bar{n}$ - единичный вектор внешней нормали к стенкам канала. В качестве масштабов в (1), (2) выбраны l и V_0.

Нетрудно видеть, что решение последней системы зависит от величины числа Рейнольдса Re_0. Рассмотрим решение системы при $Re_0 \to \infty$.

В этом случае вместо системы (1) получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + \dfrac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \\ v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \dfrac{\partial v_x}{\partial z} = -\dfrac{\partial p}{\partial x}, \\ v_x \dfrac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \dfrac{\partial v_y}{\partial z} = -\dfrac{\partial p}{\partial y}, \\ v_x \dfrac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \dfrac{\partial v_z}{\partial z} = -\dfrac{\partial p}{\partial z}. \end{cases} \tag{3}$$

Соответственно вместо граничных условий (2) имеем следующие:

$$v_z = 0 \text{ (при } z = 0\text{)},$$

$$v_z = 0,\ v_n = -1 \text{ (на стенках канала)}, \tag{4}$$

где v_x, v_y, v_z - компоненты вектора скорости в декартовой системе координат.

Будем искать удовлетворяющее граничным условиям (4) решение системы (3) в виде

$$v_x = v_x(x,y),\ v_y = v_y(x,y),\ v_z = zH(x,y), \tag{5}$$

где v_x, v_y, H - неизвестные функции.

Подстановка (2.3) в (2.1) приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + H = 0, \\ v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} = -\dfrac{\partial p}{\partial x}, \\ v_x \dfrac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_y}{\partial y} = -\dfrac{\partial p}{\partial y}, \\ z\left(v_x \dfrac{\partial H}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial H}{\partial y} + H^2\right) = -\dfrac{\partial p}{\partial z}. \end{cases} \tag{6}$$

Из второго и третьего уравнений последней системы с учетом (5) вытекает соотношение

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial z} = 0, \tag{7}$$

что приводит к следующему выражению для p:

$$p = p_0 - \frac{1}{2}c^2 z^2 - \varepsilon(x, y), \tag{8}$$

где $c, \varepsilon(x, y)$ – некоторые неизвестные константа и функция.

Нетрудно убедиться, что подстановка (8) в (6) приводит к автомодельной задаче отыскания неизвестных функций $v_x, v_y, H, \varepsilon,$ а также константы c в плоской области, представляющей собой поперечное сечение канала:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + H = 0, \\ v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} = \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial x}, \\ v_x \dfrac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_y}{\partial y} = \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial y}, \\ v_x \dfrac{\partial H}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial H}{\partial y} + H^2 = c^2 \end{cases} \tag{9}$$

с граничными условиями на контуре плоской области – поперечного сечения канала:

$$H = 0,\ v_0 = -1. \tag{10}$$

Можно модифицировать полученную систему уравнений (9), исключив из рассмотрения неизвестную функцию $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$: дифференцируя второе уравнение по y, третье - по x и сравнивая результат, получим с учетом первого уравнения:

$$v_x \frac{\partial \Omega}{\partial x} + v_y \frac{\partial \Omega}{\partial y} - \Omega H = 0. \tag{11}$$

Здесь введена компонента вектора завихренности $\varpi = rot\ \bar{v}$ по оси z, обозначенная

$$\Omega \equiv \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}. \tag{12}$$

Для целей численного решения сформулированной задачи полезно получить дивергентную форму уравнений. Так, из первого уравнения системы (9) и выражения (12) несложно получить путем дифференцирования и сравнения результатов два следующих уравнения типа Пуассона для компонент вектора скорости v_x, v_y:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\right), \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} = -\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial x}\right). \tag{14}$$

Замыкают систему последнее уравнение системы (9) и уравнение (11), переписанные в дивергентном виде с учетом первого уравнения системы (9):

$$\frac{\partial v_x H}{\partial x}+\frac{\partial v_y H}{\partial y}+2H-c^2=0, \qquad (15)$$

$$\frac{\partial v_x \Omega}{\partial x}+\frac{\partial v_y \Omega}{\partial y}=0. \qquad (16)$$

Граничными условиями для системы уравнений (13) - (16) являются следующие: $v_0=-1,\ H=0$ (на контуре), граничные условия для Ω могут быть определены в процессе расчета по соотношению (12).

После нахождения неизвестных компонент $v_x(x,y)$ и $v_y(x,y)$ неизвестная функция $\varepsilon(x,y)$ может быть определена совместным интегрированием второго и третьего уравнений системы (9).

Покажем, как могут быть аналитически определены характерные параметры задачи, и, в частности, неизвестная константа c.

Нетрудно видеть из первого уравнения системы (9), что на оси канала в любом его поперечном сечении $H^2(0{,}0)=c^2(0{,}0),$ поскольку $v_x(0{,}0)=v_y(0{,}0)=0.$

Таким образом, можно представить функцию $H(x,y)$ через некоторую иную функцию $h(x,y)$ в виде:

$$H(x,y)=ch(x,y). \qquad (17)$$

Последнее уравнение системы (2.7) с учетом первого уравнения этой же системы и (2.15) можно записать в следующем дивергентном виде:

$$\frac{\partial v_x h}{\partial x}+\frac{\partial v_y h}{\partial y}+2ch^2=c. \qquad (18)$$

Проинтегрируем первое уравнение системы (9) и уравнение (18) в поперечном сечении канала по области, ограниченной линией уровня $h=const$,
предполагая эту область односвязной. Имеем:

$$\iint_S \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)d\sigma+c\iint_S hdS=0, \qquad (19)$$

$$\iint_S \left(\frac{\partial v_x h}{\partial x}+\frac{\partial v_y h}{\partial y}\right)d\sigma+c\iint_S (2h-1)d\sigma=0. \qquad (20)$$

Обозначая $\bar{q}=v_x\bar{i}+v_y\bar{j}$, $\overline{Q}=v_xh\bar{i}+v_yh\bar{j}$, (21)

получим, применяя теорему Гаусса – Остроградского,

$$\int_{\Pi} q_n dl+c\iint_{\Pi} hdS=0, \qquad (22)$$

$$\int_{\Pi} Q_n dl+c\left(2\iint_{\Pi} h^2 d\sigma-S\right)=0, \qquad (23)$$

где через П обозначен контур интегрирования (рисунок 1).

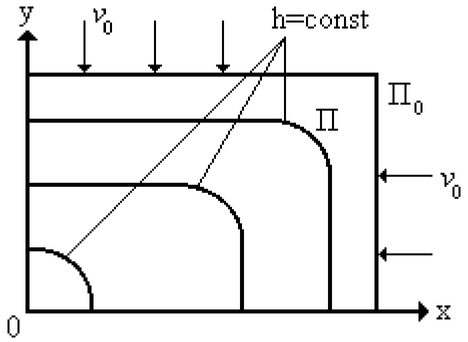

Рисунок 1

Поскольку контур интегрирования П тождественен линии уровня $h = const$, последнее равенство запишется в виде

$$h(s)\int_{\Pi} q_n dl + c(2\iint_{S} h^2 d\sigma - S) = 0, \qquad (24)$$

где через $h(s)$ обозначена величина h на контуре П.

Распространяя интегрирование на все сечение канала, получим из (22) с учетом (10) следующее соотношение:

$$-\Pi_0 + c\iint_{S_0} hd\sigma,$$

откуда следует:

$$c = \frac{\Pi_0}{\iint_{S_0} hd\sigma}. \qquad (25)$$

Здесь через Π_0 и S_0 обозначены соответственно периметр и площадь поперечного сечения канала.

Можно заметить, что при известной зависимости $h = h(\sigma)$ из выражения (25) может быть получено значение константы c. Найдем эту зависимость.

Сравнивая выражение (22) и (24), имеем

$$-ch(S)\iint_{S_0} d\sigma + c(2\iint_{S} h^2 d\sigma - S) = 0. \qquad (26)$$

Дифференцируя это выражение по S (в смысле дифференцирования по области), получим интегрально-дифференциальное уравнение:

$$2h^2 - 1 = h'\iint_{S} hd\sigma + h^2, \qquad (27)$$

где $h' = \dfrac{dh}{dS}$.

Приведя подобные члены и дифференцируя еще раз, получим из (27) более простую форму уравнения:

$$hh' - h''\iint_{S} hd\sigma = 0. \qquad (28)$$

Далее полагая, что $h' \neq 0$ всюду, из (27) и (28) получим следующее нелинейное дифференциальное уравнение для отыскания неизвестной функции $h = h(S)$:

$$h \cdot h'^2 + h''(1-h^2) = 0 . \qquad (29)$$

Граничными условиями для этого уравнения являются, очевидно, следующие:

$$h(0) = 1,\ h(S_0) = 0 . \qquad (30)$$

Нетрудно убедиться, что уравнению (29) и граничным условиям (30) удовлетворяет решение вида

$$h = \frac{\pi}{2}\frac{\Pi_0}{S_0} cos \frac{\pi}{2} \cdot \frac{S}{S_0} . \qquad (31)$$

Подставляя соотношение (31) в (25), получим выражение для искомого параметра c через геометрические параметры задачи:

$$c = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Pi_0}{S_0} . \qquad (32)$$

Таким образом показано, что при $Re_0 \to \infty$ величина неизвестного параметра c полностью и однозначно определяется через величину периметра Π_0 и величину площади S_0 поперечного сечения канала формулой (32).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Berman A.S. Laminar flow in channels with porous walls//J. Appl.Phys.-1953.-V.24,N9.
2. Taylor G.I. Fluid flow in regions boundet by porous surfaces.-Theoretical and experemental considerations.-1956.-Vol/234.-p.456.
3. Свириденков А.А., Ягодкин В.И. О течении в начальных участках в каналах с проницаемыми стенками.//Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.-1976.-№5.-С.43-48.