

КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ЗАГОТОВКИ, ОБРАБАТЫВАЕМОЙ РЕЗАНИЕМ

Смирнов В.В., Спиридонов Ф.Ф., Некрасов И.А.
Бийский технологический институт, г.Бийск

Аннотация

Рассмотрены вопросы создания учебной компьютерной модели, предназначенной для исследования нестационарного процесса переноса тепла в заготовке, обрабатываемой резанием. Реализация модели на ПЭВМ обеспечивается на основе использования метода конечных элементов. Применение расчетного алгоритма иллюстрируется примером решения задачи о нахождении поля температур при чистовой обработке тонкостенной заготовки.

Введение

В публикации [1] речь шла о технологии создания одной образовательной модели, позволяющей имитировать температурное состояние элементов технологических систем машиностроительного производства. При этом основное внимание уделялось расчету тепловых полей в режущем инструменте. Информация, полученная при использовании подобной модели, может оказаться полезной исследователю технологического процесса или конструктору режущего инструмента. Однако для технолога больший интерес зачастую представляют физические процессы, происходящие в обрабатываемой заготовке.

В данной работе рассматривается построение математической модели, способной производить оценку температурного воздействия источника теплообразования на обрабатываемую деталь при точении.

Анализ математической модели

Геометрическая модель процесса точения, построенная графическими средствами пакета Maple V.R5 приведена на рис.1.

Математическая модель процесса теплопередачи для каждого элемента технологической системы может быть построена на основе обобщенного закона сохранения энергии, как было показано в работе [1]. При этом основное отличие случая с заготовкой от случая с резцом, состоит в том, что исходное дифференциальное уравнение теплопроводности для заготовки запишется в системе координат, совершающей трансляционное перемещение с некоторой скоростью, равной скорости подачи w . Тогда при наличии источника теплоты мощностью $Q(x,y,z,t)$ получаем [2]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \omega \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - \left(w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} + w_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{c\rho} Q(x,y,z,t). \quad (1)$$

где T – температура в произвольной точке тела; t – время; $\omega = \lambda / (c\rho)$ – коэффициент температуропроводности; λ – коэффициент теплопроводности; c – удельная теплоемкость; ρ – плотность; ось x совпадает с осью вращения заготовки, ось y перпендикулярна оси x и лежит в горизонтальной плоскости (рис.1), ось z направлена вверх.

Преобразуем уравнение (1) к виду, более удобному с точки зрения численного решения.

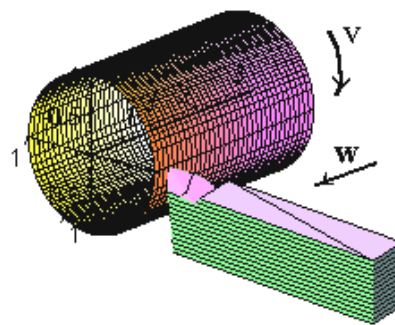


Рис.1. Геометрическая модель процесса точения

Пусть координаты точки $M(x,y,z)$ изменяются с течением времени. Тогда, воспользовавшись понятием полной или материальной производной, при дифференцировании функции $T(M,t)$ как сложной функции от t получим

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = \\ &= \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{w}_x \frac{\partial T}{\partial x} + \mathbf{w}_y \frac{\partial T}{\partial y} + \mathbf{w}_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \text{grad } T. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (1) можно переписать как

$$\frac{dT}{dt} = \omega \cdot \Delta T(M,t) + \frac{1}{c\rho} \cdot Q(M,t), \quad (2)$$

где Δ - оператор Лапласа.

Задачу будем решать в двумерной постановке, оправдывая применение плоской модели тем фактом, что большая часть деталей, обрабатываемых точением, имеет осесимметричную форму (см. рис.1). Таким образом, можно принять $T(x,y,z,t) \cong T(x,y,t)$.

Используем следующую формулировку граничных условий:

$$T = T_B \text{ на } \Gamma_1 \quad (3)$$

и (или)

$$\lambda_{xx} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \mathbf{l}_x + \lambda_{yy} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \mathbf{l}_y + q + \alpha(T - T_c) = 0 \text{ на } \Gamma_2. \quad (4)$$

В соотношениях (3)-(4): T_B - температура на границе рассматриваемой области; λ_{xx} , λ_{yy} , - коэффициенты теплопроводности в направлениях x,y ; α - коэффициент конвективного теплообмена; T_c - температура окружающей среды; q - поток тепла, который считается положительным, если тепло теряется телом; \mathbf{l}_x , и \mathbf{l}_y - направляющие косинусы нормали к поверхности; Γ_1 и Γ_2 - участки границы поверхности с соответственно заданными граничными условиями, их объединение образует полную границу области определения. Коэффициенты теплопроводности λ_{xx} и λ_{yy} , а также величина q могут быть функциями координат x и y .

Применение метода конечных элементов

Функционал, связанный с решением двумерного нестационарного линейного уравнения теплопроводности (2) с граничными условиями (3),(4) имеет вид [3]:

$$\begin{aligned} \chi &= \int_V \frac{1}{2} \left[\lambda_{xx} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \lambda_{yy} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 - 2 \left(Q - \omega \frac{\partial T}{\partial t} \right) \cdot T \right] dV + \\ &+ \int_{S_1} qT dS + \int_{S_2} \frac{\alpha}{2} [T^2 - 2TT_c + T_c^2] dS. \end{aligned} \quad (5)$$

Результат минимизации функционала (5) приводит к следующей системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$[\mathbf{C}] \frac{\partial \{\mathbf{T}\}}{\partial t} + [\mathbf{K}] \{\mathbf{T}\} + \{\mathbf{F}\} = 0, \quad (6)$$

где $[\mathbf{K}]$ - матрица теплопроводности элементов; $\{\mathbf{F}\}$ - вектор свободных членов, $[\mathbf{C}]$ - матрица, связанная с нестационарностью процесс

а. Формулы для вычисления значений матриц $[\mathbf{K}]$, $\{\mathbf{F}\}$ и $[\mathbf{C}]$ - приведены в специальной литературе, например [3].

Чтобы получить значение температуры $\{\mathbf{T}\}$ в каждой точке временного интервала t воспользуемся приближенной заменой производной по времени ее конечно-разностным аналогом с применением центральной разностной схемы [4].

Для первой производной в средней точке интервала δt имеем следующее приближенное соотношение:

$$\frac{d\{T\}}{dt} = \frac{1}{\delta t}(\{T\}_1 - \{T\}_0). \quad (7)$$

Для средней точки временного интервала формулы для $\{T\}$ и $\{F\}$ запишутся

$$\{T\}^* = \frac{1}{2}(\{T\}_1 + \{T\}_0) \quad (8)$$

и

$$\{F\}^* = \frac{1}{2}(\{F\}_1 + \{F\}_0). \quad (9)$$

Подставляя выражения (7)-(9) в дифференциальное уравнение (6), получим выражение

$$\left([K] + \frac{2}{\delta t}[C] \right) \{T\}_1 = \left(\frac{2}{\delta t}[C] - [K] \right) \{T\}_0 - 2\{F\}^*. \quad (10)$$

Вектор-столбец $\{F\}^*$ содержит известные параметры и его можно вычислить до решения уравнения (10). Значение комбинации матриц $[K]$ и $[C]$ зависит от шага по времени δt . Если δt и параметры материала не зависят от времени или от температуры, то вычисленная комбинация матриц во все моменты времени остается одинаковой. Если δt или параметры материала изменяются в процессе решения, то данную комбинацию следует вычислять каждый раз заново, проводя суммирование по всем элементам и затем триангуляризацию.

Таким образом, считая узловые значения температуры $\{T\}_0$ в момент времени t известными, решая уравнение (10), можно получить новые узловые значения $\{T\}_1$ в момент времени $t + \delta t$.

Пример вычисления

Компьютерная модель, позволяющая проследить изменение температурного состояния заготовки в процессе ее обработки, реализована в виде Maple-программы.

Для иллюстрации работы программы рассмотрим процесс чистового обтачивания тонкостенной заготовки из конструкционного материала с известными физическими свойствами.

На рис.2 показана область определения, покрытая конечно-элементной вычислительной сеткой, - сечение заготовки, образующее поверхность вращения (ось x).

Точечным тепловым источником является вершина режущего инструмента, перемещающаяся со скоростью подачи w за время $t=10$ с от узла сетки с номером 170 до узла с номером 70 (рис.2). Температура резания (или мощность источника теплоты) вычисляется в зависимости от назначенных технологических режимов, свойств обрабатываемого и инструментального материалов по методике описанной в работе [5]. На участке границы области определения между узлами с номерами 5 и 25 известно значение температуры, принятое равным избыточной температуре используемого на технологической операции станочного приспособления. Для остальных участков границы с целью уменьшения трудоемкости ввода исходных данных принято условие тепловой изоляции (теплообмен заготовки с окружающей средой не учитывается). Кроме того, ввиду малой глубины резания, что является характерным при чистовой обработке, пренебрегаем изменением геометрии заготовки.

При числе узлов вычислительной сетки 170, соответствующем разбиению на 264 элемента (рисунок 2), время счета по программе на ПЭВМ Pentium II-266 MMX для 20 шагов по времени ($\delta t=0,5$ с) составило 61,5 с.

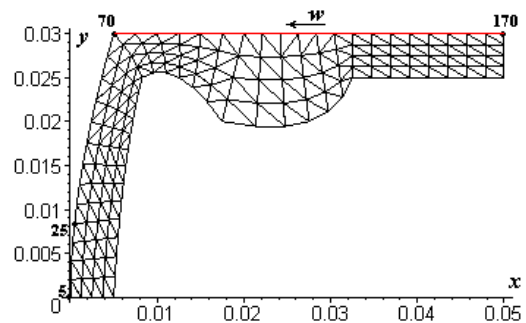


Рис.2. Область определения

На рис.3 представлено наглядное решение задачи для отдельных моментов времени, обеспеченное средствами интерактивной графики пакета Maple V.R5. Является возможным также вывод значений температуры как в отдельном узле вычислительной сетки, так и в виде общего числового массива.

Анализ графической информации (рис.3), позволяет заключить, что полученные расчетные данные о распределении температур физически правдоподобны. Для достижения большей точности вычислений программа предусматривает введение дополнительных мер, таких как:

- измельчение вычислительной сетки и ее локальное сгущение;
- организация пересчета исходной геометрии заготовки в процессе обработки;
- постановка граничных условий конвективного теплообмена на участках поверхности заготовки, контактирующих с окружающей и (или) технологической средой;
- пересчет коэффициентов, характеризующих изменение физических свойств обрабатываемого материала в зависимости от текущей величины температуры;
- учет влияния на изменения температуры автоколебаний технологической системы (или специально задаваемых вибраций).

Введение в схему вычислений каждого из вышеперечисленных факторов значительно усложняет операцию ввода исходных данных, что является одним из существенных недостатков программы.

Найденные в узлах вычислительной сетки значения температур в дальнейшем могут быть использованы для расчета напряженно-деформированного состояния заготовки, как результата совместного влияния температурных и упругих деформаций, по методике, описанной в работах [6],[7].

Кроме того, описанная технология расчета может применяться:

- для прогнозирования процессов механической обработки;
- оптимизации процесса резания путем управления некоторыми исходными режимными параметрами;
- проектирования специализированных систем автоматического управления.

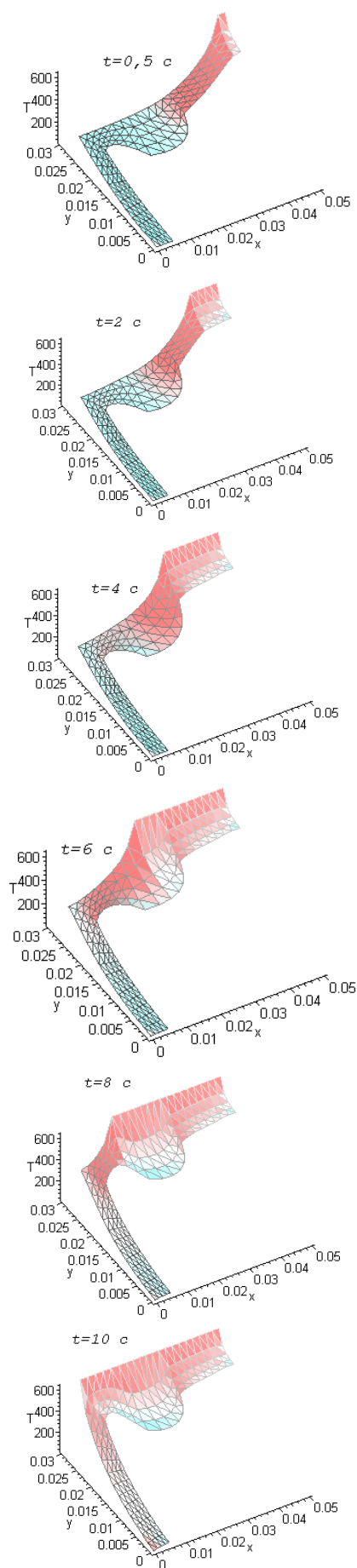


Рис.3. Наглядное решение задачи

Заключение

Разработана и реализована компьютерная модель исследования нестационарного процесса переноса тепла в заготовке, обрабатываемой резанием.

Реализация модели на ПЭВМ обеспечивается на основе использования метода конечных элементов.

Практическое применение расчетного алгоритма иллюстрируется примером решения задачи о вычислении поля температур при чистой обработке тонкостенной заготовки.

Список литературы

1. Спиридонов Ф.Ф., Фирсов А.М., Смирнов В.В. Виртуальный лабораторный комплекс исследования тепловых процессов в технологических системах. //Горизонты образования, -1999, -№1. –<http://edu.secna.ru>.

2. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности. -М.: Высшая школа,1985. – 480 С.

3. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. -М.: Мир, 1979. – 392 С.

4. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. -М.: Наука, 1989. – 432 С.

5. Резников А.Н., Резников Л.А. Тепловые процессы в технологических системах. - М.: Машиностроение, 1990. – 287 С.

6. Спиридонов Ф.Ф., Фирсов А.М., Смирнов В.В. Моделирование напряжений и деформаций при резании конструкционных материалов с учетом тепловых воздействий. //Механика летательных аппаратов и современные материалы: Сборник избранных докладов II Всероссийской научно-технической конференции. – Томск: Изд-во ТГУ, 1999. –С.120-122.

7. Смирнов В.В. Численные модели управления полями температур и деформаций в элементах технологической системы. //Инструмент Сибири. –2000. -№2(5). –С.27-28.