О ПРИМЕНЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ

Спиридонов Ф.Ф., Алексеев Т.В.
Бийский технологический институт, г. Бийск

Аннотация. Рассматривается возможность практического применения интегральных уравнений для решения задач гидродинамики. Показан способ сведения интегрального уравнения типа Вольтерра к более простому дифференциальному уравнению первого порядка. Указаны классы возможных решений полученного дифференциального уравнения. Приведены частные решения данного уравнения для некоторых практически интересных случаев. Материал используется в курсе "Моделирование на ЭВМ".

В настоящее время в курсах высшей математики и информатики рассматриваются уравнения математической физики, которые представляют собой линейные дифференциальные уравнения второго порядка с частными производными, к которым приводится решение определенных физических задач. Обычно изучаются уравнения трех типов: волновое уравнение, уравнение теплопроводности и уравнение Лапласа. Однако, некоторые физические процессы, интересные с практической точки зрения, описываются интегральными уравнениями, которые подробно не рассматриваются ввиду их сложности. Тем не менее, рассмотрение решения таких уравнений возможно, и представляет интерес для студентов отдельных специальностей.

Некоторые процессы в ракетной технике, химической технологии, экологии (например, течение в ракетном двигателе или в канале с распределенным вдувом) описываются нелинейным интегральным уравнением типа Вольтерра [1,2]

$$\int_0^x \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{\sqrt{x-\xi}} = \sqrt{2}\, f(x). \tag{1}$$

В этом уравнении $\varphi(\xi) = \dfrac{dS}{d\xi}$, $\xi = p_0 - p(\xi)$ - перепад давления между торцом канала и точкой вдува, $x = p_0 - p(z)$, - перепад давления между торцом канала и выходным сечением, f – площадь поперечного сечения, S – площадь массоподающей поверхности (все площади нормированы к начальному значению площади поперечного сечения f_0). Очевидно, что $\xi \in [0, x]$, а $x \in [0, p_0]$.

При известных функциях $f(\xi)$ и $S(\xi)$ решение уравнения (1) имеет вид [3]:

$$\varphi(x) = \sqrt{2}\left(\frac{f_0}{\pi\sqrt{x}} + \frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{f'_\xi\, d\xi}{\sqrt{x-\xi}} \right). \tag{2}$$

Несмотря на то, что решению данного уравнения было уделено много внимания [4], оно представляет интерес, в общем случае, лишь с теоретической точки зрения, поскольку при решении реальных задач заданными являются функции от продольной координаты $f(z)$ и $S(z)$, а зависимости от давления $f(\xi)$ и $S(\xi)$ неизвестны. Для сведения интегродифференциального уравнения (2) к более простому дифференциальному уравнению поступим следующим образом.

Запишем $\dfrac{df}{d\xi} = f'_\xi = \dfrac{df}{dS} \times \dfrac{dS}{d\xi}$, тогда

$$\int_0^x \frac{f_\xi' d\xi}{\sqrt{x-\xi}} = \int_0^x f_S' dQ(x,\xi), \qquad (3)$$

где $dQ(x,\xi) = \dfrac{dS}{\sqrt{x-\xi}}$. Поскольку $Q = \sqrt{2} f$, получим

$$\int_0^x f_S' dQ = f_S' Q\Big|_0^z - \int_0^z Q df_S' = \sqrt{2}\left(f_S' f\Big|_0^z - \int_0^z f df_S' \right). \qquad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в (2) и представив $f_S' f = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dS} f^2$, получим

$$\frac{dS}{dx} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{f(0)}{\sqrt{x}} + \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dS} f^2 - \frac{d}{dS} f^2 \Big|_0 \right) - \int_0^z f f_{ss}'' dS \right)\right). \qquad (5)$$

Запишем

$$\frac{dS}{dx} = \frac{dS}{df} \times \frac{df}{dx} \text{ и } \frac{d}{dS} f^2 = \frac{d}{dz} f^2 \times \frac{dz}{dS}. \qquad (6)$$

Тогда, с учетом (6) имеем:

$$f df_S' = f \frac{df_S'}{dS} dS = f \frac{d}{dz} f_S' \frac{dz}{dS} dS = \frac{f}{S_z'} \frac{d}{dz}\left(\frac{f_z'}{S_z'} \right) dS = \frac{f}{S_z'} \times \frac{f_{zz}'' S_z' - f_z' S_{zz}''}{\left(S_z'\right)^2} S_z' dz,$$

или, обозначая штрихом без индекса производную по z,

$$f df_S' = f \frac{f'' S' - f' S''}{\left(S'\right)^2} dz. \qquad (7)$$

С учетом (7) выражение (5) запишется

$$\frac{S'}{x'} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{f(0)}{\sqrt{x}} + \sqrt{2} B(z) \right),$$

где

$$B(z) = \frac{1}{2} \frac{\left(f^2\right)'}{S'}\Bigg|_0^z - \int_0^z f \frac{f'' S' - f' S''}{\left(S'\right)^2} dz.$$

Окончательно получим

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}} S' \left(\dfrac{f(0)}{\sqrt{x}} + \sqrt{2} B(z) \right)^{-1} \\ x(0) = 0 \end{cases}. \qquad (8)$$

Таким образом, интегродифференциальное уравнение (2), интересное в общем случае лишь с теоретической точки зрения, сводится к дифференциальному уравнению первого порядка (8). Можно выделить 3 класса решений: самое простое $B = 0$ – соответствует цилиндрическому каналу, $B = const$ – соответствует каналам, для которых справедливо $df/dS = const$, в частности коническому каналу, и $B = f(z)$ - все остальные случаи. Для первого случая легко находится аналитическое решение $x = \left(\dfrac{\pi S}{2\sqrt{2}}\right)^2$, для конического канала может быть получено решение уравнения (8) разложением в ряд, например,

$$x(z) = z^2\left(1 + k^2\right)\left(\frac{\pi^2}{2}\right) + z^3\left(1 + k^2\right)\left(\frac{\pi^2 k}{2}\right) + z^4\left(1 + k^2\right)\left(\pi^2 k^2\left(\frac{1}{8} - \frac{2\pi}{3}\right)\right) + O\left(z^5\right),$$

в остальных случаях возможно численное решение.

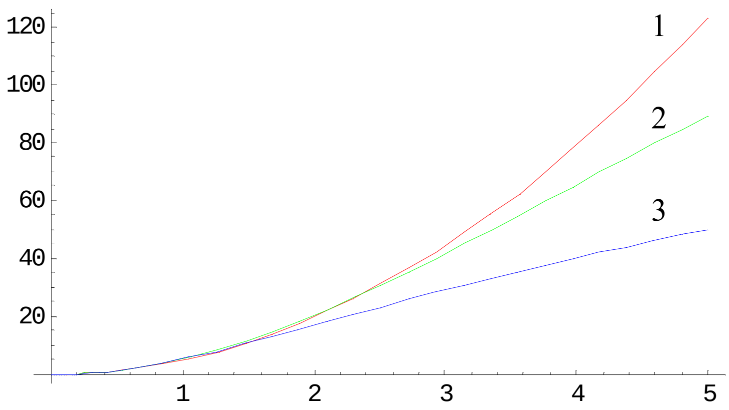

Рис. 1

Таким образом, сведение уравнения (2) к более простому уравнению (8) позволяет проводить анализ зависимости распределения давления в канале со вдувом через стенки от геометрии канала. На рис. 1 представлены численные решения уравнения (8) для канала постоянного сечения (позиция 1) и каналов, имеющих форму усеченного конуса с коэффициентом расширения $k = 0.1$ и $k = 0.2$ (позиции 2 и 3 соответственно).

Представленные материалы используются при изучении студентами курса "моделирование на ЭВМ".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бобрышев В.П., Лисица В.Д., Спиридонов Ф.Ф. Физико-математическое моделирование внутрикамерной газодинамики РДТТ. М.:-1993.-127с.
2. Ягодкин В.И. Приближенный расчет течений газа в каналах с пористыми стенками // ПМТФ. – 1964. № 1. – с. 12-18.
3. Краснов И.Л. Интегральные уравнения. М.: Наука.-1975.-300 с.
4. Теленин Г.Ф., Шитова Л. Г. Гидродинамика каналов с проницаемыми стенками // Труды института механики МГУ.-1973.-№30.-с. 41-59