АНАЛИЗ ПОВЕДЕНИЯ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Спиридонов Ф.Ф., Тушкина Т.М., Смирнов В.В.
Бийский технологический институт, г. Бийск

Аннотация

Статья предназначена для студентов и аспирантов различных специальностей, заинтересованных в автоматизации математических вычислений. Исследуются возможности современной математической системы Maple V.R5, позволяющие анализировать поведение решений некоторых классов обыкновенных дифференциальных уравнений.

Введение

Многие задачи естествознания, техники, медицины, биологии и других отраслей науки сводятся к решению дифференциальных уравнений. При этом существуют обширные классы дифференциальных уравнений, решения которых не выражаются через элементарные функции, также как и через их конечные комбинации [1]. Когда такие решения существуют, можно попытаться определить их с помощью современных математических пакетов.

В настоящей работе рассматриваются методы решения некоторых классов обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием пакета символьной математики Maple 5.R5, основы организации которого изложены в работах [2,3].

Пакеты DEtools и plots

Как отмечено выше, многие дифференциальные уравнения не имеют решения в замкнутой форме. Например, дифференциальное уравнение $y'(x)=x^2+y^2$ не имеет такого решения. Но, разумеется, имеется одно решение для каждого конкретно выбранного значения *y(0)*.

Пусть будет $y(0)=1$, тогда можно предложить Maple постараться получить численное приближенное решение задачи. Набор команд для решения такой задачи не очевиден. Тем не менее, введем следующее:

```
> with(DEtools):with(plots):\
  de:=D(y)(x) = x^2+(y(x))^2;
```

$$de:=D(y)(x)=x^2+y(x)^2$$

```
> p:= dsolve({de, y(0)=1}, y(x),type=numeric):\
  odeplot(p,[x,y(x)],-1..1 );
```

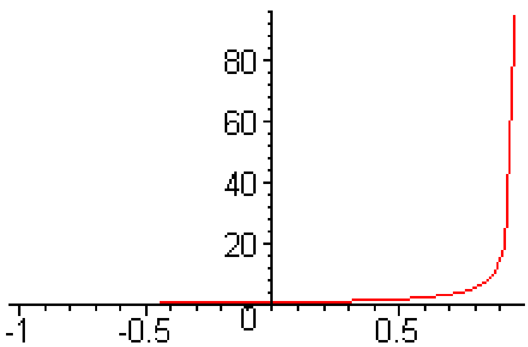

Рис.1

Решение (рис.1) выглядит так, словно у него имеется вертикальная асимптота, хотя нет и намека на деление на ноль при формулировке проблемы. В действительности вертикальная асимптота *y* решения имеется, истинное решение устремляется к бесконечности при стремлении *x* к *1*.

Одна из главных теорем о дифференциальных уравнениях констатирует, что при определенных ограничениях, наложенных на уравнение и его начальные условия (такие, например, как *y(0)=1*), гарантируется существование решения, по крайней мере, для некоторого интервала в окрестности значения *x* из начальных условий. Эта теорема не обещает "хорошего поведения" решения на всем действительном интервале искомых значений функции. Более того, что-то обязательно происходит в некоторой точке. Численные методы, к сожалению, "не задумываются" о поведении функций и выдают численные значения даже тогда, когда истинное решение вряд ли существует.

В пакете "Maple DEtools" имеются и другие полезные команды, ознакомиться с которыми можно набрав в ячейке ввода:

```
> with(DEtools);
```

Введем "de" для того, чтобы воспроизвести дифференциальное уравнение, с которым мы работали ранее:

```
> de;
```

$$D(y)(x)=x^2+y(x)^2$$

Введем команду:

```
> DEplot(de,y(x),x=-1..1,\
  {[0,-1],[0,-3/4],[0,-1/2],[0,0],[0,1/2],[0,3/4],[0,1]},\
  y=-2..2);
```

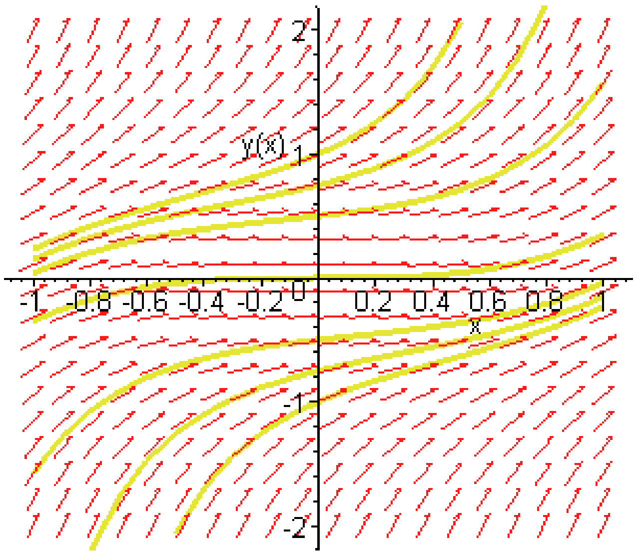

Рис.2

Команда DEplot изобразила то, что называется полем направлений дифференциального уравнения, совместно с некоторыми интегральными кривыми - численными решениями уравнения (рис.2). Множество списков параметров (в квадратных скобках) указывает точки на оси ординат, через которые должны проходить интегральные кривые.

Используем функцию DEplot для качественного анализа поведения решений дифференциальных уравнений.

Определим дифференциальное уравнение:

```
> deqn1:=diff(y(x),x)=y(x)*(4-y(x));
```

$$deqn1 := \frac{\partial}{\partial x} y(x) = y(x)\,(4 - y(x))$$

Найдем графическое решение:

```
> DEplot(deqn1,y(x),x=0..3,y=-1..5);
```

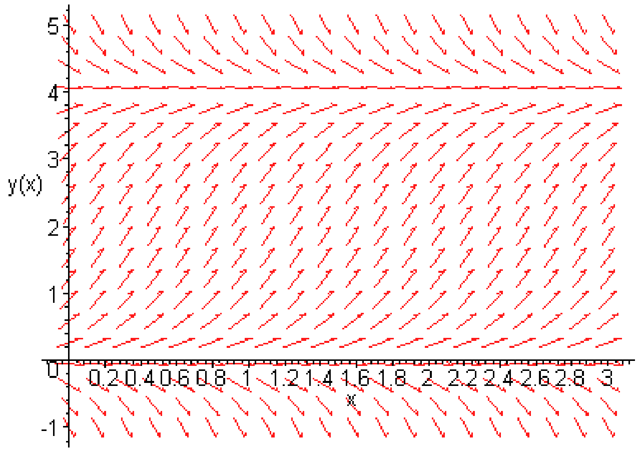

Рис.3

Рассматривая полученное поле направлений (рис.3), можно заключить, что:

1) Если изначально $y>0$, тогда $y(x)$ стремится к 4 при стремлении x к "бесконечности", если же $y(0)<0$, то $y(x)$ стремится к "минус бесконечности". Представляется, что не имеет значения, каково начальное значение x. То есть уравнение является автономным.

2) Если $y=0$ в начале процесса, то $y=0$ и в дальнейшем.

Таковы выводы для абстрактной проблемы. Если же рассматривается практическая задача, то мы вправе ожидать, что y может сколь угодно мало отличаться от ноля. Тогда, рано или поздно, функция $y(x)$ устремится к 4 или к "минус бесконечности".

Разделение переменных

Покажем, что уравнение $dy/dx=x^2/(1-y^2)$ сепарабельно, т.е. допускает разделение переменных, а затем найдем уравнение для его интегральных кривых.

Вызовем пакет DEtools:

```
> with(DEtools):
> DEplot(diff(y(x),x)=x^2/(1-y^2),y,x=0..4,\
  {[0,-2],[0,-1],[0,-1/2],[0,0],[0,1/2],[0,1],[0,2]},\
   y=1.1..4);
```

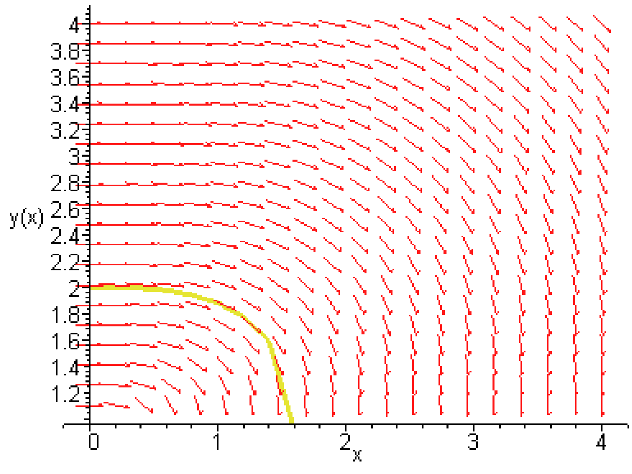

Рис.4

Полученный график (рис.4) показывает, что может произойти деление на ноль в случае, когда *y=1* или *y=-1*. И численный метод, заложенный в Maple, не может справиться с такой ситуацией. Попробуем решить это уравнение символически.

```
> interface(labelling=false);\
  curve0=dsolve({diff(y(x),x)=x^2/(1-y(x)^2),y(0)=0},y(x));\
  interface(labelling=true);
```

$$curve0 = \Bigg(y(x) = -\frac{1}{4}\left(-4x^3+4\sqrt{-4+x^6}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)} - \frac{1}{\left(-4x^3+4\sqrt{-4+x^6}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}} + I\left(-\frac{1}{4}\left(-4x^3+4\sqrt{-4+x^6}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)} + \frac{1}{\left(-4x^3+4\sqrt{-4+x^6}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}}\right)\sqrt{3},\ y(x) = -\frac{1}{4}\left(-4x^3+4\sqrt{-4+x^6}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)} - \frac{1}{\left(-4x^3+4\sqrt{-4+x^6}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}} + I\left(\frac{1}{4}\left(-4x^3+4\sqrt{-4+x^6}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)} - \frac{1}{\left(-4x^3+4\sqrt{-4+x^6}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}}\right)\sqrt{3},\ y(x) = \frac{1}{2}\,\frac{\left(-4x^3+4\sqrt{-4+x^6}\right)^{\left(\frac{2}{3}\right)}+4}{\left(-4x^3+4\sqrt{-4+x^6}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}} \Bigg)$$

Теперь нужно выбрать подходящее решение из полученного набора, что не очень просто. Однако произведем аналитические преобразования "вручную":

$$y'=x^2/(1-y^2) \rightarrow (1-y^2)\ dx=x^2 \rightarrow y-y^3/3=x^3/3+C.$$

Из чего следует, что интегральные кривые описываются неявной зависимостью

$$y-y^3/3=x^3/3.$$

Теперь обратимся к Maple еще раз, но с помощью других средств:

```
> with(plots):
> contourplot(y-y^3/3-x^3/3,x=-4..4,y=-4..4);
```

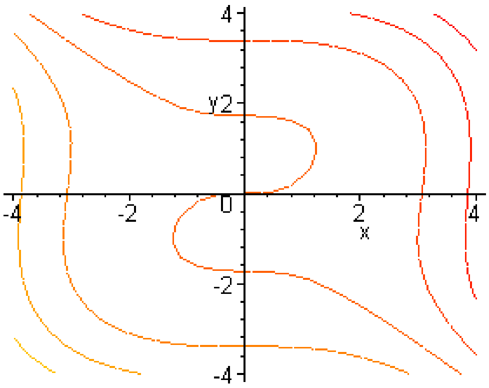

Рис.5

Из последнего полученного графика (рис.5) видно, что мы имеем кривые *y(x)*, являющиеся многозначными функциями. Таким образом, при решении подобных задач надо иметь в виду, что решения, как однозначные функции, с помощью команды DEplot пакета Maple могут быть определены лишь на отдельных интервалах числовой прямой, там, где **одному** значению *x* соответствует **одно** значение *y*.

Для удобства нашего анализа напишем Maple-программу для определения сепарабельности дифференциального уравнения.

Пусть *y'=F(x,y)* является дифференциальным уравнением первого порядка. Тогда процедура "checkseparable(F)" возвращает значение true, если уравнение сепарабельно, иначе оно или сепарабельно или нет. В таком случае есть возможность дополнительной проверки.

```
> checkseparable:=proc(F) \
    local g,d2gdxdy;\
    g:=log(F);\
    d2gdxdy:=simplify(diff(g,x,y));\
    if d2gdxdy=0 then \
      RETURN(true) \
    else\
      RETURN(`Уравнение не сепарабельно. Попробуйте нарисовать график.
Если на графике везде ноль, то уравнение можно свести к сепарабельному.`)\
    fi \
  end:

  checkseparable :=

  proc(F)
  local g,d2gdxdy;
      g := log(F);
      d2gdxdy := simplify(diff(g,x,y));
      if d2gdxdy = 0 then RETURN(true)
      else
         RETURN(`Уравнение не сепарабельно. Попробуйте нарисовать график.
Если на графике везде ноль, то уравнение можно свести к сепарабельному.` )\
      fi
  end:
```

Проверим эту процедуру:

> checkseparable(y+y^2);\

$$true$$

> checkseparable(1+x+y+x*y);\

$$true$$

> checkseparable(sin(x*y));

Уравнение не сепарабельно. Попробуйте нарисовать график.

Если на графике везде ноль, то уравнение можно свести к сепарабельному.

Процедура работает правильно.

Решения со специальными функциями

Рассмотрим пример дифференциального уравнения, решением которого является комбинация функций Бесселя.

Решим уравнение $y' = x^2 - y^2$:

> dsolve({diff(y(x),x)=x^2-y(x)^2,y(0)=1},y(x));

$$y(x) = \frac{x\left(\frac{1}{2}\frac{\pi\left(\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2\sqrt{2}+\pi\right)\mathrm{BesselI}\left(\frac{-3}{4},\frac{1}{2}x^2\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2} - \mathrm{BesselK}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2}x^2\right)\right)}{\frac{1}{2}\frac{\pi\left(\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2\sqrt{2}+\pi\right)\mathrm{BesselI}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}x^2\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2} + \mathrm{BesselK}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}x^2\right)}$$

Упростим решение:

> expn:=simplify(rhs(%));\

$$expn := \frac{x\left(\pi\,\mathrm{BesselI}\left(\frac{-3}{4},\frac{1}{2}x^2\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2\sqrt{2}+\pi^2\,\mathrm{BesselI}\left(\frac{-3}{4},\frac{1}{2}x^2\right) - 2\,\mathrm{BesselK}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2}x^2\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)}{\pi\,\mathrm{BesselI}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}x^2\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2\sqrt{2}+\pi^2\,\mathrm{BesselI}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}x^2\right) + 2\,\mathrm{BesselK}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}x^2\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2}$$

Построим график решения:

> plot(expn,x=-2..2);

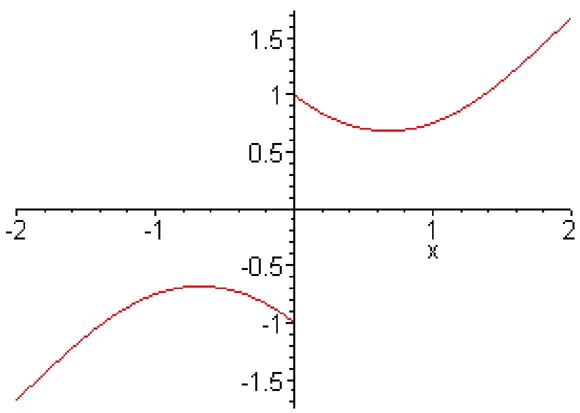

Рис.6

Получим выражение для решения "с плавающей точкой":

> expn2:=map(evalf,expn);

$$expn2 := x\,(16.54124221\,\mathrm{BesselI}(-.7500000000,\,.5000000000\,x^2) - 3.003292188\,\mathrm{BesselK}(.7500000000,\,.5000000000\,x^2))\Big/(16.54124221\,\mathrm{BesselI}(.2500000000,\,.5000000000\,x^2) + 3.003292188\,\mathrm{BesselK}(.2500000000,\,.5000000000\,x^2))$$

Оценим значение полученной функции при $x=2$:

> evalf(subs(x=2,expn2));

1.679458983

Построим график решения:

> with(DEtools):

> DEplot(diff(y(x),x)=x^2-y^2,y,x=-2..2,{[0,-2],[0,-1],[0,-1/2],[0,0],[0,1],[0,2]},y=-2..2);

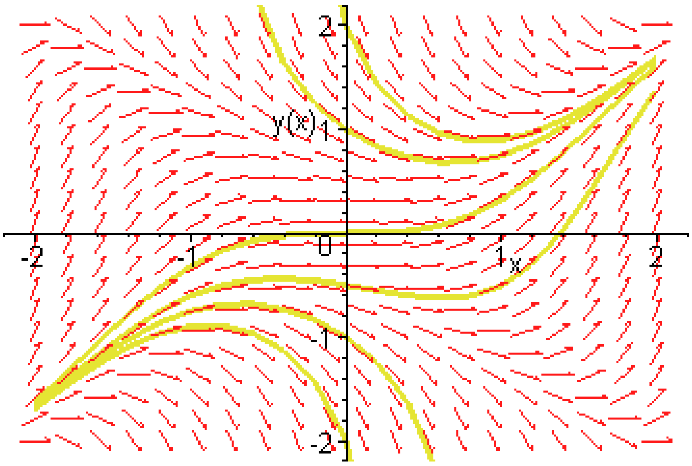

Рис.7

Повысим точность:

> Digits:=12;evalf(subs(x=2,expn2));

Digits := 12

1.67945898311

Сравнив новое и прежнее решение, замечаем, что они отличаются незначительно.

Получим численное решение рассматриваемой задачи:

> fn:=dsolve({diff(y(x),x)=x^2-y(x)^2,y(0)=1},y(x),numeric);

fn := **proc**(*rkf45_x*) ... **end**

Оценим решение при $x=2$:

> fn(2);

[x = 2, y(x) = 1.679458982967983]

Точность численного решения существенно выше, а время, затраченное на получение численного решения меньше.

Другие возможности пакета plots

Рассмотрим уравнение *y′ = sin(x) + sin(y)*, которое не может быть решено аналитически с помощью команды dsolve.

> with(plots):

Изобразим правую часть уравнения с помощью команды:

> contourplot(sin(x)+sin(y),x=-6..6,y=-6..6);

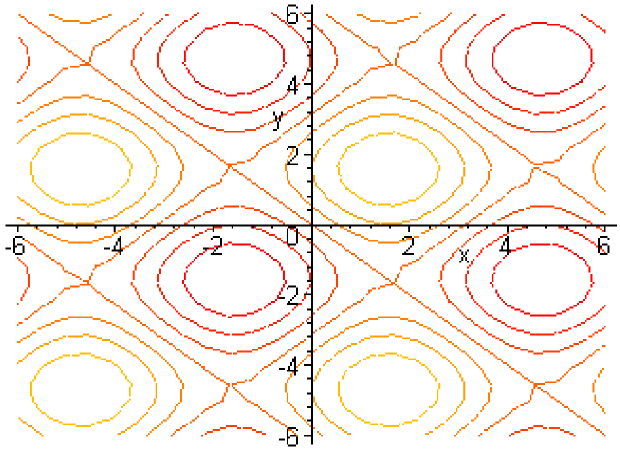

Рис.8

Попытаемся решить уравнение аналитически:

> dsolve(diff(y(x),x) = sin(x) + sin(y) , y(x));

Error, (in ODEtools/info) y(x), and, y, cannot both appear in the given ODE.

Как видим, с аналитическим решением Maple не справился.

> with(DEtools):

Создадим последовательность последовательностей следующей командой:

> starters:=[seq(seq([j,k],j=-4..4),k=-4..4)];

starters := [[-4, -4],[-3, -4],[-2, -4],[-1, -4],[0, -4],[1, -4],[2, -4],[3, -4],[4, -4],[-4, -3],[-3, -3],[-2, -3],[-1,-3],[0, -3],[1, -3],[2, -3], [3, -3],[4, -3], [-4, -2], [-3, -2], [-2, -2], [-1, -2], [0, -2],[1, -2], [2, -2], [3, -2], [4, -2], [-4, -1], [-3, -1],[-2, -1], [-1, -1], [0, -1], [1, -1], [2, -1], [3, -1],[4, -1], [-4, 0], [-3, 0], [-2, 0], [-1, 0], [0, 0], [1, 0],[2, 0], [3, 0], [4, 0], [-4, 1], [-3, 1], [-2, 1], [-1, 1],[0, 1], [1, 1], [2, 1], [3, 1], [4, 1], [-4, 2], [-3, 2],[-2, 2], [-1, 2], [0, 2], [1, 2], [2, 2], [3, 2], [4, 2],[-4, 3], [-3, 3], [-2, 3], [-1, 3], [0, 3], [1, 3], [2, 3],[3, 3], [4, 3], [-4, 4], [-3, 4], [-2, 4], [-1, 4], [0, 4],[1, 4], [2, 4], [3, 4], [4, 4]]

> fn:=sin(x) + sin(y);

fn := sin(x) + sin(y)

> plot2:=DEplot(diff(y(x),x)=fn,y,x=-6..6,starters,y=-6..6);

Warning, computation interrupted

По-видимому, где-то имеется ошибка. Обратимся за помощью:

> ?DEplot

Да, объект starters должен быть типа "множество", а не "список". Изменим тип этого объекта командой:

> starts:={op(starters)};

starts :={[2,1],[2,0],[1,1],[1,0],[0,0],[1,2],[-3,-3],[-2,-3],[-1,-3],[0,-3],[1,-3],[2,-3],[3,-3],[4,-3], [-4,-2],[-3,-2],[-2,-2],[1,-4],[2,-4],[3,-4],[4,-4],[-4,-3],[-1,0],[-1,2],[-1,1],[2,2],[4,-1],[-4,0],[-3,0], [-2,0], [3,0],[4,0],[-4,1],[-3,1],[-2,1],[-1,-2],[0,-2],[1,-2],[2,-2],[3,-2],[4,-2],[-4,-1],[-3,-1],[-2,-1], [-1,-1],[0,-1],[1,-1],[2,-1],[3,-1],[4, 4],[-4, 3], [-3, 3],[-2, 3], [-1, 3], [0, 3], [1, 3], [2, 3], [3, 3], [4, 3], [-4, 4], [-3, 4], [-2, 4], [-1, 4], [0, 4], [1, 4], [2, 4],[3, 4], [0, 1], [3, 1], [4, 1], [-4, 2], [-3, 2], [-2, 2],[0, 2], [3, 2], [4, 2], [-4, -4], [-3, -4], [-2, -4],[-1, -4], [0, -4]} Построим график решения:

> DEplot(diff(y(x),x)=fn,y,x=-6..6,starts,y=-6..6);

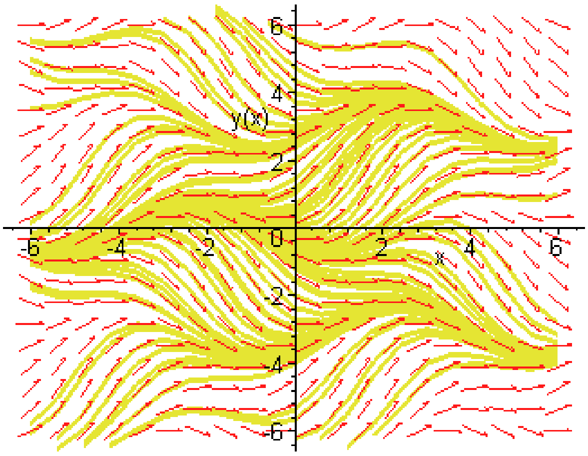

Рис.9

Полученный график (рис.9) очень информативен.

Во-первых, в областях, где *sin(x)+sin(y)>0*, решения возрастают (сравним с рис.8).

Во-вторых, имеются области сгущения и разрежения. Это области, в которых *d/dy(sin(x)+sin(y))* отрицательны или положительны соответственно, что зависит только от значения *y*, поэтому, например, одна из таких зон простирается от $y=\pi/2$ до $y=3\pi/2$. Зоны сгущения и разрежения перемежаются, оставаясь одинаковой ширины. В зонах сгущения у решений наблюдается тенденция к сближению по мере роста *x*, в противоположных зонах решения как бы разбегаются.

В-третьих, можно заметить, что имеются стационарные решения в зонах сжатия, в этих областях *sin(y)* возрастает, или, что эквивалентно, *cos(y)<0*. Все эти решения все более сгущаются с возрастанием аргумента и, по-видимому, стремятся сойтись к периодическому решению. Если, например, продлить график до значений *x=12*, то можно было бы увидеть такое решение. Хотя это и не явная синусоида, но очень похожа на нее и периодична. Аналогичные решения расположены также выше и ниже описанного (по вертикали они разделены интервалом 2π). Между ними расположены подобные по форме, но нестабильные решения. Если двигаться в обратном направлении по аргументу, то будет видно, что они происходят из стабильных.

Общая теория решений дифференциальных уравнений первого порядка утверждает, что решения существуют на некоторых подынтервалах. Тот факт, что *f(x,y)=sin(x)+sin(y)*, или $|f(x,y)| \le 2$, означает, что тангенс угла наклона решений по модулю не может быть больше *2*, поэтому решение не может достичь бесконечности за конечное время. Поскольку *f(x,y)* непрерывна везде, то это означает, что любое решение такого уравнения определено на всей числовой прямой.

Заключение

В работе исследованы некоторые функции математической системы MapleV, позволяющие анализировать поведение решений некоторых классов обыкновенных дифференциальных уравнений.

Список литературы

1.Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.:Наука, 1974. –630 С.

1. Дьяконов В.П. Математическая система Maple V R3/R4/R5. –М.:Солон,1998. – 400 С.

2. Манзон Б.И. Maple V Power Edition. –М.:Филинъ, 1998. – 240 С.