

Аналог задачи Л.Ф. Тота в пространстве R^3

Д.В. Васин

Эта работа посвящена исследованию характеристики Л.Ф. Тота в трехмерном евклидовом пространстве и поиску множества допустимых значений этой величины.

Известна следующая задача в пространстве R^2 :

Пусть P_2 — выпуклый n -угольник на евклидовой плоскости со сторонами длины $a_1, \dots, a_n$. Обозначим через b_i длину наибольшей хорды n -угольника P_2 , параллельной стороне a_i .

Назовем величину

$$\mu(P_2) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i}$$

характеристикой Тота для выпуклых плоских многоугольников.

Л.Ф. Тот в работе [1] показал, что $\sqrt{8} < \mu(P_2) \leq 4$, и предположил, что $3 \leq \mu(P_2) \leq 4$, где равенства слева и справа достигаются на таких многоугольниках как усеченный треугольник и параллелограмм соответственно. Более подробное обсуждение этой задачи можно найти в [2], а мы перейдем к формулировке задачи в пространстве R^3 .

Пусть P_3 — выпуклый многогранник в трехмерном евклидовом пространстве. $f_1, \dots, f_n$ — гипергрani многогранника P_3 . Обозначим через S_i площадь гипергрani f_i многогранника P_3 .

Пусть $F_i(P_3)$ — функция площади сечения многогранника P_3 , где сечения многогранника строятся плоскостями параллельными гипергрani f_i . Обозначим через $M_i(P_3)$ максимальное значение функции сечения $F_i(P_3)$

$$M_i(P_3) = \max_{P_3} F_i(P_3).$$

В обозначениях введенных выше, характеристика Тота для трехмерных многогранников выглядит следующим образом:

$$\mu(P_3) = \sum_{i=1}^n \frac{M_i(P_3)}{S_i}.$$

Рассмотрим нижнюю границу множества допустимых значений $\mu(P)$. В двумерном пространстве, как предположил Л.Ф. Тот, эта граница достигается на усеченном треугольнике. Однако, нижняя граница достигается так же и на симплексе, в силу равенства длин сторон a_i с длинами соответствующих наибольших хорд b_i треугольника. Напомним, что для симплекса $\mu(P_2) = 3$.

Рассмотрим теперь симплекс в трехмерном пространстве. Для каждой гипергрani, ее площадь S_i равна максимуму функции площади сечения $M_i(P_3)$, а значит $\mu(P_3)$ примет значение равное количеству гиперграней, т.е. $\mu(P_3) = 4$. Заметим, что для двух- и трехмерных симплексов можно записать общую формулу характеристики Тота: $\mu(P) = d + 1$, где d - размерность пространства. Опираясь на данное сходство, выскажем предположение о том, что величина $\mu(P)$ в трехмерном пространстве принимает минимальное значение так же на симплексах, т.е:

$$\mu(P_3) \geq 4.$$

Все замечания сделанные выше, позволяют утверждать, что характеристика $\mu(P)$ зависит от размерности пространства d . По аналогии с поиском нижней границы множества допустимых значений, определим зависимость верхней границы от размерности пространства. Как известно, Л.Ф. Тот предположил, что верхняя граница $\mu(P_2)$ в двумерном пространстве достигается на параллелограмме и равна 4. Возможны следующие предположения о зависимости размерности пространства с характеристикой Тота в двумерном пространстве:

$$\mu(P_2) \leq (2d)$$

или

$$\mu(P_2) \leq d^2.$$

Рассмотрим параллелепипед, который является трехмерным аналогом параллелограмма. Предположим, что $\mu(P_3)$ достигает максимума на нем. $\mu(P_3)$ в этом случае равно 6, так как площади S_i равны максимумам функций $M_i(P_3)$, а количество гиперграней равно 6. Отсюда следует, что $\mu(P_3) \leq (2d)$.

И так, получаем, что неравенство Л.Ф. Тота в трехмерном пространстве может выглядеть следующим образом:

$$4 \leq \mu(P_3) \leq 6.$$

Проверяем истинность этого предположения на некотором множестве H тестовых многогранников P_3 в пакете "Многогранник", который написан на объектно-ориентированном языке программирования C++ в среде разработчика Borland C++ Builder 5. Пакет позволяет генерировать многогранники путем построения выпуклой оболочки некоторого заданного случайным образом множества вершин и вычислять характеристику Тота.

Полученные результаты тестирования приведены в таблице 1:

Таблица 1

№	Вершины	Гипер- границы	Характеристика Тота	№	Вершины	Гипер- границы	Характеристика Тота
1	6	8	6.80550938453425	30	9	14	7.12784812060319
2	7	10	6.84107013758572	31	9	14	6.80117265376321
3	4	4	4	32	9	14	8.07448111916017
4	9	14	5.16911023246024	33	10	16	5.95116911313651
5	7	10	5.91684108663247	34	8	12	8.88688731592995
6	7	10	6.31032692577452	35	6	8	6.935441576054
7	7	10	7.70796129525597	36	9	14	8.62023113567152
8	8	12	5.7523767332491	37	6	8	7.42292082901149
9	9	14	5.80254614942793	38	4	4	4
10	6	8	5.95393219144808	39	5	6	4.73511247100807
11	6	8	6.66845581502794	40	7	10	5.77273103083136
12	8	12	6.33786403370728	41	9	14	5.85073975243537
13	6	8	6.85307337029053	42	7	10	5.56390689786365
14	9	14	5.59802367356544	43	5	6	5.32238015698074
15	9	14	8.42233581602402	44	7	10	7.41224085080406
16	6	8	5.61017849555708	45	4	4	4
17	9	14	6.73046867926099	46	9	14	6.69477616094048
18	10	16	6.3450265601776	47	8	12	5.71550920487578
19	6	8	6.3869419731352	48	10	16	6.15756713392449
20	7	10	5.25757294884952	49	9	14	7.37032689959313
21	9	14	5.77389319024152	50	5	6	6.85143878474681
22	8	12	5.72874888126309	51	8	12	6.67135817393488
23	9	14	7.21062190036024	52	4	4	4
24	8	12	7.26216248727952	53	7	10	6.21951507808429
25	6	8	5.87636919880959	54	5	6	4.6028856281585
26	6	8	6.76804878180378	55	8	12	6.27800632852107
27	6	8	7.1195305465744	56	7	10	5.97812738612807
28	7	9	7.17317561518451	57	7	10	6.34152457673901
29	9	14	5.9164609730679	58			

По результатам, приведенным в таблице, видно, что предположение о нижней границе подтверждается, все значения величины $\mu(p)$ не превышают 4, а равенство достигается на симплексах. В тоже время, предположение о верхней границе опровергнуто, имеются большое количество результатов значительно превышающих число 6, которое по предположению являлось верхней границей.

Однако, характеристика $\mu(P_3)$ превысила величину $(2d)$, но не превысила величину d^2 . Проведем исследование нового предположения:

$$4 \leq \mu(P_3) \leq 9,$$

изменив множество многогранников H . До этого тестирование проводилось на многогранниках, мощность множества вершин которых не превышает 10. Увеличим ограничение до 20 вершин и проведем тестирование.

Результаты тестирования (таблица 2) также опровергают предположение о максимальном значении характеристики Тота $\mu(P_3)$, в тесте номер 26 и 41 величины $\mu(P_3)$ несколько превышают число 9, являющуюся верхней границей. Заметим, что результаты таблицы 2 подтверждают предположение о нижней границе множества допустимых значений характеристики Тота.

Таким образом, численные результаты исследования характеристики Л.Ф. Тота в трехмерном пространстве подтверждают предположению о том, что $\mu(P_3) \geq 4$, а вопрос о верхней границе остается открытым. Проведенные исследования позволяют сделать вывод о том, что величина характеристики Л.Ф. Тота $\mu(P_3)$ зависит от количества вершин многогранника P_3 . Так, по результатам исследований, с увеличением числа вершин многогранника увеличилось и максимальное значение характеристики $\mu(P_3)$. Было бы интересно получить зависимость между этими характеристиками.

Таблица 2

№	Вершины	Гипер- гра- ни	Характеристика Тота	№	Вершины	Гипер- гра- ни	Характеристика Тота
1	9	14	6.54987020695104	31	11	18	6.93166775905522
2	13	22	6.59226230552572	32	4	4	4
3	9	14	6.32433017042976	33	8	12	5.55470314295326
4	10	16	8.38263028903953	34	4	4	4
5	9	14	6.01790602416782	35	6	8	7.31511021138788
6	8	12	6.60722881103052	36	7	10	5.96090103956892
7	14	24	6.2229053559946	37	11	18	5.52318788065827
8	7	10	6.99368105331928	38	8	12	5.95363250307228
9	8	12	7.09996114950802	39	7	10	7.48933914590989
10	7	10	7.25523310518668	40	10	16	5.68329535779793
11	11	18	6.27225957059531	41	10	16	9.04049674426656
12	9	14	8.29034955199059	42	8	12	8.58315960163323
13	9	14	5.54119493902489	43	11	18	7.55731774924748
14	7	10	7.47706304134677	44	10	16	8.15422067534746
15	11	18	6.25113815187827	45	5	6	5.31098847815218
16	10	16	7.25065820250907	46	7	10	5.98848616663266
17	5	6	4.94154327865159	47	11	18	7.97413288204962
18	7	10	8.47965580591861	48	8	12	7.56462200666258
19	8	12	8.30312036235716	49	9	14	7.12344318985009
20	10	16	6.39075093418086	50	8	12	7.31047618096644
21	8	12	7.65295693649911	51	5	6	5.40459158480123
22	12	20	8.90581816998717	52	7	10	8.43028005487602
23	11	18	6.85665704746489	53	7	10	5.84044751697134
24	9	14	6.37728825776242	54	12	20	8.78514122083353
25	7	10	6.46008189371661	55	9	14	7.62477340807345
26	10	16	9.22408799573766	56	10	16	7.84917905772657
27	9	14	6.03636208039029	57	7	10	7.19609044405022
28	11	18	6.40391129474748	58	10	16	6.57398808997739
29	7	10	5.74801857738849	59	8	12	6.31334951889175
30	9	14	8.11295965552691	60	7	10	6.71215072384794

Список литературы

1. Tóth L.F. Über eine affineinvariante Masszahl bei Eipolyedern // Studia Sci. Math. Hungar. 1970, N5, P.173–180.
2. Croot H.T., Falconer K.J., Guy R.K. Unsolved problems in gemetry, 1994, Springer-Verlag, P.58.

Сведения об авторе

Васин Дмитрий Валерьевич

Адрес: Россия, 658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6, РИИ АлтГТУ

тел: (38557)3–87–86

e-mail: vasindima@mail.ru