

Стабилизация системы управления заданием ее конечных и бесконечных нулей и увеличением коэффициента обратной связи

А.В. Сорокин

Введение

Одной из важных проблем теории управления является проблема стабилизации системы управления путем выбора соответствующей обратной связи, обеспечивающей замкнутой системе устойчивость (желаемые полюса в левой части комплексной плоскости). Решению данной задачи посвящено достаточно большое число подходов и методов, ссылки на которые можно например найти в отечественной литературе [4, 5]. В данной работе предлагается подход, отличный от известных [4, 5], основанный на задании конечных и бесконечных нулей системы и использовании больших коэффициентов обратной связи (усиления). В работе приводятся условия его использования и его реализация на иллюстративном примере.

1. Постановка задачи

Рассматривается линейная стационарная система управления

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (1)$$

где x — n — вектор состояния, u — r — вектор управления, A и B постоянные матрицы соответствующих размеров. Предполагается, что доступны измерению все компоненты вектора $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$. Скомбинируем из них r — мерный вектор выхода

$$y = Hx, \quad (2)$$

где H — $(r \times n)$ — постоянная матрица, элементы которой будут определены из рассмотренных ниже соотношений.

Определение 1. Конечными нулями системы (1),(2) называются комплексные числа s_i , удовлетворяющие соотношению

$$\text{rank } P(s_i) < n + \min(\dim u, \dim y), \quad (3)$$

где

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI_n - A & -B \\ H & O \end{bmatrix} \quad (4)$$

матрица Розенброка системы (1),(2).

Поскольку, в силу равенства $\dim u = \dim y$, число строк и столбцов в матрице (4) совпадает, то соотношение (3) переходит в уравнение

$$\det P(s) = 0 \quad (5)$$

и конечные нули s_i системы (1),(2) определяются как корни (5).

Определение 2. Нулевым направлением для конечного нуля s_i называется вектор $[x_i^T \ u_i^T]^T$, удовлетворяющий соотношению

$$\begin{bmatrix} s_i I_n - A & -B \\ H & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ u_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (i = 1, \dots, n - r). \quad (6)$$

Соотношения (6) получаются из (3). Из соотношений (6) следует, что заданный конечный нуль s_i и подвектор u_i могут однозначно определять подвектор x_i .

Введем для системы (1) обратную связь в виде

$$u = -Fu, \quad (7)$$

где F — $r \times r$ — постоянная матрица вида $F = kI_r$, k — действительный скаляр.

Известно [1, 2], что $n - r$ полюсов замкнутой системы (1),(2),(7) при $k \rightarrow \infty$ стремятся к ее конечным нулям, а другие r полюсов стремятся к асимптотам (бесконечным нулям)

$$s_j^\infty = -k\lambda_j, \quad (j = 1, \dots, r), \quad (8)$$

где λ_j — ненулевые собственные числа матрицы BH . Здесь предполагается, что $\text{rank } BH = r$. Действительно, запишем характеристический полином замкнутой системы управления (1),(2),(7)

$$\det(sI_n - A + BFH) = \det(sI_n - A + kBH). \quad (9)$$

При большом значении параметра k правую часть выражения (9) можно приближенно представить следующим образом

$$\det(sI_n - A + kBH) \approx \det(sI_n + kBH). \quad (10)$$

Отсюда непосредственно вытекают соотношения (8).

Зададим множество желаемых действительных конечных нулей $s_1, \dots, s_{n-r}$ и соответствующее им множество линейно независимых подвекторов нулевых направлений $u_1, \dots, u_{n-r}$ для системы (1),(2). Предположим, что нули $s_1, \dots, s_{n-r}$ не являются собственными числами матрицы A и система (1),(2) управляема.

Задача состоит в определении матрицы H , которая при заданных действительных конечных нулях $s_1, \dots, s_{n-r}$ и соответствующих им подвекторах $u_1, \dots, u_{n-r}$ удовлетворяет соотношениям (6), и которая обеспечивает r заданных ненулевых действительных собственных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ матрице BH .

2. Решение задачи

Характеристический полином для матрицы BH можно записать в виде [3]

$$\det(sI_n + kBH) = s^{n-r} \det(sI_r + kHB), \quad (11)$$

Отсюда следует, что для задания ненулевых собственных чисел матрицы BH достаточно задать r собственных чисел матрицы HB .

Зададим дополнительно для собственных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ матрицы HB правые собственные вектора $\nu_1, \dots, \nu_r$, удовлетворяющие условию

$$\det(\lambda_j I_r + HB)\nu_j = 0, \quad (12)$$

которое перепишем в виде

$$-\lambda_j I_r \nu_j = HB \nu_j. \quad (13)$$

Представим (6) в виде двух соотношений

$$(s_i I_n - A)x_i - Bu_i = 0, \quad (14)$$

$$Hx_i = 0, \quad (15)$$

где $i = 1, \dots, n-r$.

Выразим x_i из соотношения (14) и умножим его слева на матрицу H

$$Hx_i = H(s_i I_n - A)^{-1} Bu_i.$$

Учитывая (15), получим

$$H(s_i I_n - A)^{-1} Bu_i = 0, \quad (i = 1, \dots, n-r).$$

Объединим последнее соотношение с соотношением (13) и вынесем влево за квадратные скобки общий множитель H

$$\begin{aligned} H[(s_1 I_n - A)^{-1} Bu_1, \dots, (s_{n-r} I_n - A)^{-1} Bu_{n-r}, B\nu_1, \dots, B\nu_r] = \\ = [0, \dots, 0, -\lambda_1 \nu_1, \dots, -\lambda_r \nu_r]. \end{aligned} \quad (16)$$

Выразим из последнего соотношения матрицу H

$$\begin{aligned} H = [0, \dots, 0, -\lambda_1 \nu_1, \dots, -\lambda_r \nu_r] \times \\ \times [(s_1 I_n - A)^{-1} Bu_1, \dots, (s_{n-r} I_n - A)^{-1} Bu_{n-r}, B\nu_1, \dots, B\nu_r]^{-1}. \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, отсюда следует, что если решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (16) существует, то матрица H , вычисленная по формуле (17) обеспечивает системе (1),(2) заданное множество конечных и бесконечных нулей. Рассмотрим вопрос разрешимости данной задачи.

Теорема 1. Для существования решения СЛАУ (16) необходимо выполнения двух условий:

1. Конечные нули $s_1, \dots, s_n$ не должны совпадать с собственными числами матрицы A ;
2. Система (1) должна быть управляемой.

Доказательство. Первое условие очевидно и обеспечивает невырожденность матрицы $(s_i I_n - A)$, обращаемой в формуле (17). Докажем второе условие от противного. Предположим, что решение СЛАУ (16) существует, но система (1) неуправляема. Тогда, поскольку система неуправляема, существует невырожденная матрица N такая, что матрицы $\bar{A} = N^{-1}AN$ и $\bar{B} = N^{-1}B$ имеют следующую структуру:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_* \\ \bar{A}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

где подматрицы $\bar{A}_i$ и $\bar{B}_i$ могут содержать ненулевые элементы; $\bar{A}_* = [0 \dots 0 \quad \alpha \quad 0 \dots 0]$ - вектор-строка размера n , состоящая из нулевых элементов и одного необязательно ненулевого элемента α на диагонали матрицы A . Структуру (18) можно получить, например, используя преобразование матрицы A к жордановой форме [4]. В этом случае α будет просто собственным числом матрицы A . Без потери общности, учитывая инвариантность нулей к невырожденному преобразованию системы (1),(2) [1], предположим, что матрицы системы (1) уже имеют структуру (18). Нетрудно показать, что структура обратной матрицы $(s_i I_n - A)^{-1}$ будет аналогична структуре матрицы A , где естественно на месте элемента α будет находиться какой-то другой элемент. Данный факт следует из того, что алгебраические дополнения матрицы A и соответственно матрицы $(s_i I_n - A)$ для нулевых элементов строки $\bar{A}_*$, будут содержать нулевые строки. Умножая матрицу $(s_i I_n - A)^{-1}$ справа на вектор Bu_i , получим матрицу следующей структуры

$$(s_i I_n - A)^{-1} Bu_i = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ 0 \\ \bar{X}_2 \end{bmatrix},$$

где X_i — некоторые подматрицы. Формируя таким образом столбцы матрицы СЛАУ (16), получим, что построенная матрица имеет нулевую строку независимо от того, как выбраны векторы $u_1, \dots, u_{n-r}$ и $\nu_1, \dots, \nu_r$. Отсюда следует, матрица СЛАУ (16) не обратима и СЛАУ (16) не имеет решения. Полученное противоречие доказывает условие 2 теоремы 1. $\square$

Используя условия данной теоремы приведем алгоритм решения задачи задания конечных и бесконечных нулей.

Алгоритм

1. Проверяем управляемость системы (1). Если система неуправляема, то конец алгоритма.
2. Вводим конечные действительные нули $s_1, \dots, s_{n-r}$, отличные от собственных чисел матрицы A .
3. Вводим действительные подвектора $u_1, \dots, u_{n-r}$ нулевых направлений.
4. Вводим действительные собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ и собственные вектора $\nu_1, \dots, \nu_r$ матрицы HB .
5. Формируем матрицу $[(s_1 I_n - A)^{-1} Bu_1, \dots, (s_{n-r} I_n - A)^{-1} Bu_{n-r}, B\nu_1, \dots, B\nu_r]$ СЛАУ (16) и проверяем ее на невырожденность. Если полученная матрица вырождена, то конец алгоритма.
6. Формируем матрицу свободных членов СЛАУ (16) и определяем решение по формуле (17).

Подход, изложенный в данной работе, удобно использовать при конструировании обратной связи (7) в системе (1),(2) с большими коэффициентами усиления k . Задавая, например, желаемое множество действительных нулей можно выбрать подходящий коэффициент усиления, который бы обеспечивал приемлемое приближение полюсов замкнутой системы к заданным нулям. Единственным ограничением является расположение нулей на действительной оси. Рассмотрим пример, иллюстрирующий применение данного подхода.

Пример

Пусть система (1) имеет следующие матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно показать, что с данными матрицами система (1) является управляемой. Собственные числа матрицы A имеют следующие значения: $0, 2.4142, -0.4142, 1$. Зададим желаемые конечные нули, отличные от собственных чисел матрицы A : $s_1 = -2, s_2 = -1$. Подвектора u_1, u_2 , соответствующие заданным конечным нулям, положим такими: $u_1 = [2 \ 1]^T, u_2 = [1 \ 1]^T$. Желаемые собственные числа и правые собственные вектора матрицы HV зададим следующими: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 4, \nu_1 = [2 \ 2]^T, \nu_2 = [3 \ 1]^T$. Поскольку матрица СЛАУ (16) невырождена, то решение системы (16) существует и будет иметь вид:

$$H = \begin{bmatrix} 4.5 & -1.5 & -6 & -1.5 \\ 0.5 & 10.5 & 2 & 2.5 \end{bmatrix}.$$

Подвектора x_i нулевых направлений для заданных конечных нулей имеют следующие значения:

$$x_1 = [-0.7500 \ 0.2500 \ -0.5000 \ -0.5000],$$

$$x_2 = [-0.2857 \ 0.1429 \ -0.1429 \ -0.4286].$$

Рассмотрим асимптотику полюсов замкнутой системы (1),(2), (7) при $k \rightarrow \infty$, приведенную в таблице. Обозначим через p_i полюса системы (1),(2), (7).

полюса и $p_i/(-k)$	$k = 0$	$k = 5$	$k = 10$	$k = 100$	$k = 1000$
p_1	0	-19.3352	-39.5872	-399.9383	-4.0×10^3
p_2	2.4142	-7.8402	-23.9585	-294.0258	-2.994×10^3
p_3	-0.4142	-4.0000	-2.5720	-2.0473	-2.0047
p_4	1.0	-0.8246	-0.9023	-0.9886	-0.9988
$p_1/(-k)$	-	5.4907	3.9567	3.9994	4.0000
$p_2/(-k)$	-	2.9449	2.3958	2.9403	2.9940

Из таблицы видно, что первые два полюса p_1 и p_2 стремятся к бесконечным нулям s_1^∞ и s_2^∞ , а их отношения с k стремятся к собственным числам матрицы HV . Полюса p_3 и p_4 стремятся к конечным нулям s_1 и s_2 . В качестве приемлемого коэффициента обратной связи достаточно выбрать $k = 5$.

3. Неполная информация о векторе состояния

Ранее предполагалось, то что измерению доступны все компоненты вектора состояния системы (1). На практике такое не всегда выполняется и доступны измерению лишь некоторые линейные комбинации $z = Cx$ компонент вектора x . Чтобы преодолеть эту трудность можно предложить использовать вместо компонент вектора состояния x компоненты вектора его оценки $\hat{x}$, полученной, например, с помощью наблюдателя Люенбергера [4,5]

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(z - C\hat{x}), \quad (19)$$

где L —постоянная матрица, выбирающаяся из учета обеспечения асимптотической устойчивости динамической системы

$$\dot{e} = (A - LC)e. \quad (20)$$

Здесь $e = x - \hat{x}$ —ошибка оценивания. Управление для системы (1) в этом случае строится по формуле

$$u = FH\hat{x}. \quad (21)$$

Рассмотрим пример из раздела 2 и предположим, что доступен для измерения вектор z с матрицей

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Задавая полюса динамической системы (20) множеством: $\{-3; -2 \pm 0.5i; -1.5\}$, вычислим матрицу L модальным методом [4,5] и построим переходные процессы в замкнутых системах управления (1),(2),(7) (см. рис 1) и (1),(2),(19),(21) (см. рис 2).

Как видно из рисунков, несмотря на колебательные процессы в замкнутой системе с наблюдателем (рис. 2), система стабилизируется через 6 единиц времени, что вполне удовлетворительно. Замкнутая система с полной информацией о векторе состояния (рис. 1) имеет более лучшие переходные процессы и стабилизируется раньше.

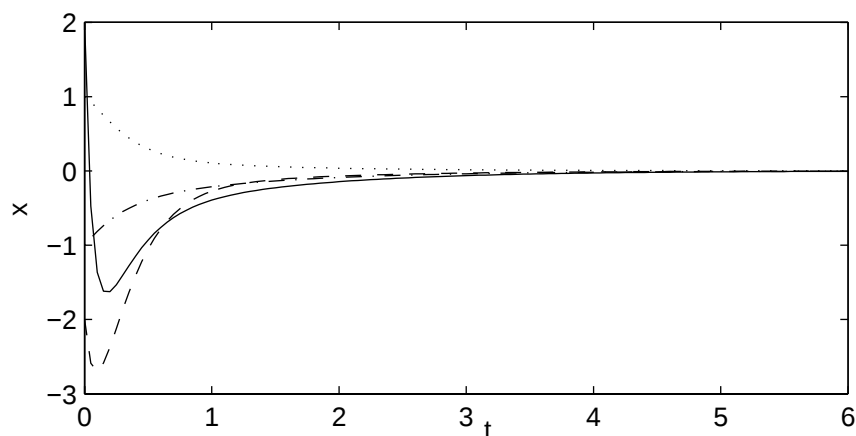


Рис. 1: Переходные процессы в системе с полной информацией о векторе состояния

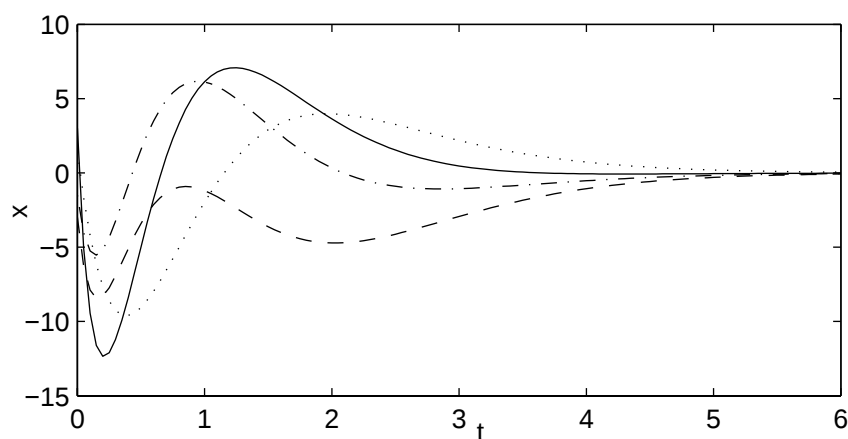


Рис. 2: Переходные процессы в системе с неполной информацией о векторе состояния

Список литературы

1. Смагина Е.М. *Вопросы анализа линейных многомерных объектов с использованием понятия нуля системы*. — Томск: Изд-во ТГУ, 1990. 160с.
2. Kouvaritakis B., Edmunds J.M. *Multivariable root loci: a unified approach to finite and infinite zeros* // Int. J. Control, 1979, v.29, p.393-428.
3. Kouvaritakis B., MacFarlane A.G.J. *Geometric approach to analysis and synthesis of systems zeros: Part 1. Square systems* // Int. J. Control, 1976, v.23, No.2, p.149-166.
4. Андреев Ю.Н. *Управление конечномерными линейными объектами*. — М.: Наука, 1976, 424с.
5. Андреев Ю.Н. *Алгебраические методы пространства состояний в теории управления линейными объектами*. // Автоматика и телемеханика, 1977, № 3, с.5-50.

Сведения об авторе

Сорокин Алексей Викторович

Адрес: Россия, 656099, Барнаул, пр. Ленина, 46, АлтГТУ, каф. прикладной математики

тел: (3852)36-75-83

e-mail: sorokin@agtu.secna.ru