Области знакоопределенной одномерной секционной кривизны на трехмерных неунимодулярных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой

Л.Н. Шестакова

Введение

В работе [1] были даны оценки кривизн левоинвариантных римановых метрик для унимодулярных и неунимодулярных групп Ли. В данной статье рассматриваются области знакоопределенной одномерной секционной кривизны левоинвариантных римановых метрик трехмерных неунимодулярных групп Ли.

Обозначения и необходимые сведения

Пусть G – связная трехмерная неунимодулярная группа Ли с алгеброй Ли g, $(\cdot,\cdot)$ – произвольное скалярное произведение на g. Пусть e_1, e_2, e_3 – положительно ориентированный ортонормированный базис в g такой, что [2]

$$[e_1, e_2] = \alpha e_2 + \beta e_3, [e_1, e_3] = \gamma e_2 + \delta e_3, [e_2, e_3] = 0,$$

где $\alpha + \delta \neq 0$ и $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$. По аналогии с [2] обозначим
$\alpha = 1+\xi, \beta = (1+\xi)\eta, \gamma = -(1-\xi)\eta, \delta = 1-\xi$, где $\xi \geq 0, \eta \geq 0$. Тогда главные значения одномерной кривизны A равны:

$$k_1 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{3}{2}\eta^2\xi^2,$$

$$k_2 = -\frac{1}{2} - 2\xi - 2\eta^2\xi + \frac{1}{2}\xi^2\eta^2 + \frac{1}{2}\xi^2,$$

$$k_3 = -\frac{1}{2} + 2\xi + 2\eta^2\xi + \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2\xi^2 + \frac{1}{2}\xi^2.$$

Теорема.
Пусть $A_{(\cdot,\cdot)}(\pi) : G_{1,n} \to R$ – одномерная кривизна риманова многообразия $(G, (\cdot,\cdot))$. Тогда имеют место следующие оценки

$$k_2 \leq A_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \leq k_3$$
если $0 < \xi < 1$
и
$$k_1 \leq A_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \leq k_3,$$
если $\xi \geq 1$.

Для того, чтобы определить области, в которых одномерная кривизна имеет постоянный знак, исследуем знаки k_1, k_2, k_3.

Замечание. Путем элементарных вычислений можно установить неравенства:

$$k_2 < k_1 < k_3, \text{ если } 0 < \xi < 1$$
и
$$k_1 \leq k_2 < k_3, k_3 > 0 \text{ если } \xi \geq 1.$$

Кроме того очевидно, что $k_1 < 0$ при любом $\xi \geq 0$ (и, следовательно, $k_2 < 0$, если $0 < \xi < 1$). Таким образом, для дальнейшего рассмотрения интересен случай, когда ξ удовлетворяет неравенствам $0 < \xi < 1$.

Справедливы утверждения:

Лемма 1.
Множество левоинвариантных римановых метрик отрицательной одномерной кривизны $A_{(\cdot,\cdot)}$ на римановом многообразии $(G, (\cdot,\cdot))$ определяется следующими условиями:

$$k_3 = -\frac{1}{2} + 2\xi + 2\eta^2\xi + \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2\xi^2 + \frac{1}{2}\xi^2 < 0,$$

если $0 < \xi < 1$.

Лемма 2.

Множество левоинвариантных римановых метрик неположительной одномерной кривизны $A_{(\cdot,\cdot)}$ на римановом многообразии $(G, (\cdot,\cdot))$ определяется следующими условиями:

$$k_3 = -\frac{1}{2} + 2\xi + 2\eta^2\xi + \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2\xi^2 + \frac{1}{2}\xi^2 = 0,$$

если $0 < \xi < 1$.

Лемма 3.

Множество левоинвариантных римановых метрик осциллирующей одномерной кривизны $A_{(\cdot,\cdot)}$ на римановом многообразии $(G, (\cdot,\cdot))$ определяется следующими условиями:

$$k_3 = -\frac{1}{2} + 2\xi + 2\eta^2\xi + \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2\xi^2 + \frac{1}{2}\xi^2 > 0,$$

если $0 < \xi < 1$.

Доказательства лемм.

Докажем лемму 1. Так как одномерная кривизна является непрерывной функцией на грассмановом многообразии $G_{1,3}$, то она достигает своих экстремальных значений k_1 , k_2 или k_3 на векторах e_1, e_2, e_3 на данном многообразии. Поэтому из теоремы 1 и замечания к ней видно, что знак $A_{(\cdot,\cdot)}$ определяется знаком величины k_3. Видно, что если $k_3 < 0$, то $A_{(\cdot,\cdot)} \leq k_3 < 0$, т.е. кривизна отрицательна при $0 < \xi < 1$.

Доказательства лемм 2 и 3 проводится аналогично.

Покажем, что множество левоинвариантных римановых метрик отрицательной, неположительной, осциллирующей одномерной кривизны на данном многообразии не пусто. Для этого рассмотрим случай $\eta = c = const \geq 0$. Получим сечение искомого множества плоскостью $\eta = c$.

Теорема 2.

Пусть $(G, (\cdot,\cdot))$(где G- неунимодулярная трехмерная группа Ли) - риманово многообразие, тогда справедливы следующие утверждения:

1.Область отрицательной одномерной кривизны представляет собой множество решений системы

$$\begin{cases} -1 + 4\xi + 4c^2\xi + c^2\xi^2 + \xi^2 < 0 \\ 0 < \xi < 1 \end{cases}$$

2.Область неположительной одномерной кривизны представляет собой множество решений системы

$$\begin{cases} -1 + 4\xi + 4c^2\xi + c^2\xi^2 + \xi^2 = 0 \\ 0 < \xi < 1 \end{cases}$$

3.Область осциллирующей одномерной кривизны представляет собой множество решений системы

$$\begin{cases} -1 + 4\xi + 4c^2\xi + c^2\xi^2 + \xi^2 > 0 \\ 0 < \xi < 1 \end{cases}$$

Причем множества решений этих систем не пусты.

Доказательство.

Докажем утверждение 1. Рассмотрим условия леммы 1 при $\eta = c$. Они примут следующий вид :

$$\begin{cases} -1 + 4\xi + 4c^2\xi + c^2\xi^2 + \xi^2 < 0 \\ 0 < \xi < 1 \end{cases}$$

Множество решений данной системы не пусто, так как представляет собой внутренность криволинейного треугольника, ограниченного прямыми $\xi = 0, \xi = 1, \omega = 0$ и куском параболы $-1 + 4\xi + 4c^2\xi + c^2\xi^2 + \xi^2 = \omega$ (см. рис.1). Утверждения 2 и 3 доказываются аналогично.

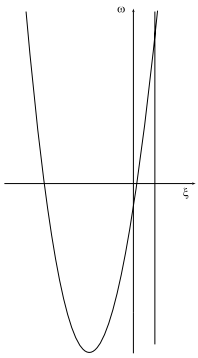

Рис. 1:

Список литературы

1. Rodionov E.D., Slavskii V.V. *Curvatures estimations of left invariant riemannian metrics on three dimensional Lie groups* // Proceedings of the 7th international conference - DGA-98, University, Brno, Czech Republic. 1999, 16 pp.
2. Milnor J. *Curvature of left invariant metrics on Lie groups* // Advances in mathematics, **21**, 1976. p.293-329

Сведения об авторе

Шестакова Людмила Николаевна
Адрес: Россия, 656015, Барнаул, пр. Социалистический, 126, БГПУ
тел: (822)36–54–36