

Методика обучения работе с системами компьютерной математики для естественно научных специальностей

С.П. Семенов, В.В. Славский

На пути внедрения компьютерных технологий в учебный процесс высшей и средней школы, к настоящему времени накоплен некоторый опыт и ситуация, наконец, начинает проясняться. Достаточно очевидно, что центральной фигурой процесса обучения и в будущем останется преподаватель, использование же компьютерных технологий предоставляет обучающему и обучаемому свободу выбора форм и методов работы. Компьютер должен дополнять (а не подменять), на наш взгляд, традиционные формы обучения.

В последние годы в процесс математического образования все настойчивее и успешнее внедряются системы компьютерной математики (СКМ), такие как DERIVE, MathCad, MatLab, Maple, Mathematica. Одними из наиболее популярных СКМ являются пакеты DERIVE и MathCad. Они освобождают обучаемого от проведения громоздких, рутинных выкладок, однотипных вычислений и позволяет сосредоточиться непосредственно на анализе моделируемого явления. В отличие от создания программ с помощью алгоритмических языков, диалог с пакетом СКМ происходит на достаточно естественном языке, используются традиционные обозначения и способы написания формул. Данная компьютерная технология особенно эффективна при решении разнообразных прикладных задач, прежде всего математического моделирования в науке, технике, экономике. Несомненным достоинством современных СКМ является прекрасные графические возможности, что позволяет сделать наглядными многие математические понятия и методы.

В преподавательской среде математиков существует обоснованное опасение, что использование систем компьютерной математики "испортит" математическую подготовку учащихся, подобно тому, как "калькулятор разучил их считать". Выход видится в разнесении во времени обучению классическим понятиям и методам элементарной математики и применению СКМ. Здесь в полной мере должна проявиться квалификация и искусство преподавателя. Очевидно, что успешное использование систем СКМ возможно только при условии знания основ математики. Более того, чтобы использовать все возможности таких пакетов как MatLab, Maple, Mathematica нужна весьма высокая математическая культура.

Реальность сегодняшнего дня такова, что компьютерные технологии быстро развиваются и стремительно входят в повседневную жизнь. Хотим мы этого или нет, но опыт преподавательской работы показывает, что школьники и студенты решают задачи, используя системы компьютерной математики.

Система DERIVE, в первую очередь, предназначена для символьных (аналитических) преобразований. Возможности системы полностью покрывают потребности классических курсов элементарной и высшей математики. Отличительной чертой системы является возможность установки на компьютерах с весьма умеренными техническими характеристиками, что немаловажно, учитывая финансовые возможности среднего образования.

Система Mathcad первоначально была ориентирована на численные расчеты, но в настоящее время в связи с интеграцией с Maple система приобрела широкие возможности для символьных преобразований. Отличительной чертой системы запись математических выражений в их общепринятой нотации.

В течение последних пяти лет на математическом факультете Алтайского госуниверситета на 7 и 8 семестрах функционирует годовой учебный курс "Системы компьютерной математики".

Целью курса является обучение работе в среде пакетов Derive и MathCad, а также повторение основных разделов высшей математики. Основной формой занятий служат лабораторные работы в дисплейных классах. Учебный курс сопровождается методическим пособием "Системы компьютерной математики", которое может быть использовано также и для самостоятельного изучения пакетов компьютерной математики.

Пособие содержит начальные сведения по теоретическим основам компьютерной алгебры, обзор математических пакетов (Matlab, Mathematica, Derive, MathCad, Maple и некоторых других), использующих компьютерную алгебру. В пособии представлены план-конспекты лабораторных занятий с заданиями, варианты индивидуальных заданий. В приложение приведены справочные сведения по главному меню пакетов Derive, MathCad и основные инструкции по работе с пакетами.

В первой части пособия, посвященной пакету Derive, рассматриваются следующие разделы высшей математики: вектора и матрицы; основные операции математического анализа; приложения дифференциального исчисления; приложения интегрального исчисления; дифференциальные уравнения 1-го и 2-го порядка; численные методы; обработка экспериментальных данных; симплекс метод в задачах линейного программирования; программирование для Derive; финансово-экономические расчеты; комплексные числа и функции.

Во второй части пособия излагается технология работы в среде пакета MathCad. На лабораторных занятиях студентам предлагаются следующие темы: начальные сведения по интерфейсу пакета Mathcad; настольный справочник пакета; технология редактирования формул; форматирование результатов; решение уравнений; векторы

и матрицы; итерационные и рекурсивные вычисления; суммирование рядов; производные и интегралы; решение обыкновенных дифференциальных уравнений; символьные вычисления; задачи математической статистики; интерполяция, аппроксимация и сглаживание функций; решение экономических задач; создание анимации с помощью встроенных средств пакета Mathcad.

Структура план-конспекта лабораторного занятия включает в себя минимальные теоретические сведения, подробный разбор решения типовой задачи и задание для самостоятельного выполнения. Ниже, в качестве примера приведен план-конспект одного из лабораторных занятий.

Занятия №10. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

Рассмотрим возможности Mathcad, предназначенные для численного решения:

- задачи Коши для систем ОДУ первого порядка;
- задачи Коши для ОДУ высших порядков;
- краевых задач для ОДУ высших порядков.

1. Решение задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений первого порядка.

Задача Коши в векторной форме записывается в следующем виде:

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{D}(x, \mathbf{Y}), \quad \mathbf{Y}(x_1) = \mathbf{Y}_0 \quad (1)$$

где $\mathbf{Y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$; — искомая вектор-функция; $\mathbf{Y}_0 = (y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n})$ — вектор начальных условий;

$$\mathbf{D}(x, \mathbf{Y}) = (f_1(x, y_1, \dots, y_n), f_2(x, y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(x, y_1, \dots, y_n))$$

— заданный вектор правых частей (Derivation - производная); x — независимая переменная.

Задача Коши (1) может быть решена в Mathcad численно с помощью функции **rkfixed**($\mathbf{Y}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{npoints}, \mathbf{D}$), методом Рунге-Кутты с постоянным шагом. Смысл параметров данной функции следующий: $\mathbf{Y}_0$ — вектор начальных условий из (1); $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ — начальная и конечная точки интегрирования; **npoints** — число узлов на отрезке, с концами $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$; $\mathbf{D}$ — имя вектор-функции правых частей. Функция **rkfixed** возвращает матрицу, количество строк которой равно **npoints+1**, первый столбец содержит координаты узлов сетки $x_1, \dots, x_{\text{npoints}+1}$, остальные столбцы — вычисленные приближенные решения $y_1, \dots, y_n$.

Пример 1. Найти на отрезке $[0, \pi]$ приближенное решение уравнение $y' = \cos(5xy)$, удовлетворяющее начальным условиям $\mathbf{y}(0) = 0,5$ и построить график найденного решения (использовать **rkfixed**(...)).

Указание. Присвойте переменной **ORIGIN** значение 1, чтобы нумерация компонент вектора начиналась с единицы. При решении задачи Коши для уравнения первого порядка вектор решения $\mathbf{Y}$ имеет единственную компоненту y_1 . Вектор правых частей также содержит одну компоненту. Перед обращением к функции **rkfixed** присвойте переменной $\mathbf{y}_0[1]$ (1 — это индекс, ставится при помощи клавиши **<[>**) начальное значение 0.5, а переменной $\mathbf{D}(x, y)$ — выражение для правой части уравнения — $\cos(5xy)$. Выполните присвоение: $\mathbf{Y} := \text{rkfixed}(\mathbf{y}_0, 0, \pi, 20, \mathbf{D})$, где $\mathbf{y}_0$ — вектор начальных условий; $x_1=0, x_2=\pi$ начальная и конечная точка интегрирования системы; **npoints=20** — число узлов на отрезке $[0, \pi]$; $\mathbf{D}$ — имя вектор-функции $\mathbf{D}(x, y)$. Постройте график решения, для этого выберите панель **Graph**, щелкните на кнопке и введите в качестве переменной на оси абсцисс (столбец координат узлов сетки), а на оси ординат (столбец значений решений в узлах сетки). Чтобы ввести номер столбца, используйте клавиши **ctrl+^**. Ниже на рис. 1 приведен фрагмент рабочего документа MathCad, содержащий решения задачи.

Задание 1. Найти на отрезке $[0, 3]$ численное решение задачи Коши на сетке из 50 узлов методом Рунге-Кутты. Построить графики найденных решений.

$$\begin{cases} y_1' = -y_2 + \sin(x \cdot y_3) \\ y_2' = -y_1^2 \\ y_3' = -y_3 - y_1 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 0 \\ y_3(0) = 1 \end{cases}$$

2. Решение задачи Коши для дифференциального уравнения n-го порядка.

Задача Коши состоит в отыскании функции $y(x)$, удовлетворяющей уравнению и начальным условиям следующего вида:

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_1) &= y_{01}, \quad y'(x_1) = y_{02}, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_1) = y_{0n} \end{aligned} \quad (2)$$

Задача Коши (2) для дифференциального уравнения n-го порядка стандартным образом сводится к задаче Коши вида (1) для эквивалентной нормальной системы ОДУ первого порядка. Действительно, обозначив

$$y_1(x) = y(x), \quad y_2(x) = y'(x), \quad \dots, \quad y_k(x) = y^{(k-1)}(x), \quad \dots, \quad y_n(x) = y^{(n-1)}(x),$$

ORIGIN := 1 $y_{01} := 0.5$ $D(x, y) := \cos(5 \cdot x \cdot y_1)$ $Y := \text{rkfixed}(y_0, 0, \pi, 60)$

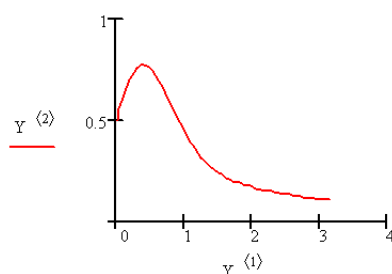


Рис. 1:

получим задачу Коши для системы ОДУ, решение которой описано выше;

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(x_1) = y_{01}, \\ y_2(x_1) = y_{02}, \\ \vdots \\ y_n(x_1) = y_{0n}. \end{cases} \quad (3)$$

Пример 2. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка. Найти на отрезке **[0,3]** приближенное решение уравнения **$y'' = \exp(-0.1xy)$** , удовлетворяющее начальным условиям **$y(0)=1, y'(0)=1$** , и построить график найденного решения.

Сведем решение задачи для уравнения второго порядка к задаче для эквивалентной нормальной системы второго порядка. Обозначим **$y_1(x)=y(x)$** и **$y_2(x)=y'(x)$** , получим систему:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = \exp(-0.1 \cdot x \cdot y_1) \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(0) = 1, \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$$

Ниже на рис. 2 приведен фрагмент рабочего документа MathCad, содержащий решения данной задачи на сетке из 20 равностоящих узлов:

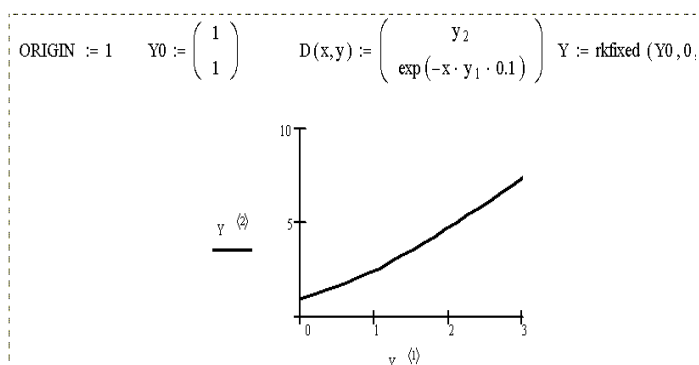


Рис. 2:

Задание 2. Найти на отрезке **[0,5]** приближенное решение уравнения

$$y'''' - 2ky'' + k^2y = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям **$y(0)=1, y'(0)=1, y''(0)=2, y'''(0)=3$** , и построить график найденного решения.

3. Краевые задачи.

Возможности MathCad для решений краевых задач рассмотрим на следующем примере:

На отрезке $[x1, x2]$ требуется найти решение дифференциального уравнения

$$y'' = f(x, y, y'), \quad x1 < x < x2, \quad (4)$$

удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$y(x1) = y0, \quad y(x2) = y1. \quad (5)$$

MathCad дает возможность решения краевой задачи (4),(5) методом стрельбы, сущность которого состоит в сведении краевой задачи к решению задачи Коши: из граничной точки $x1$ выпускаются всевозможные траектории решений и из них выбирается та, которая принимает заданное значение в граничной точке $x2$.

Для нахождения недостающего начального условия в точке $x1$ следует использовать функцию **Sbval**(v, x1, x2, D, load, score). Далее задачу Коши нужно решать способом, описанном в п.2.

Sbval(v, x1, x2, D, load, score) - возвращает вектор, содержащий недостающие начальные значения в точке $x1$.

v - вектор предположений для начальных приближений для искомых недостающих значений в точке $x1$.

x1, x2 - граничные точки интервала, на котором ищется решение дифференциального уравнения.

D(x,y) - вектор-функция из n -элементов, содержащая первые производные неизвестных функций.

load(x1,v) - вектор-функция, состоящая из начальных условий в точке $x1$. Некоторые значения будут константы, соответствующие заданным начальным условиям. Другие будут неизвестны в начале, но будут найдены **sbval**.

score(x2,y) - вектор-функция, каждый элемент которой есть разность между граничным условием в точке $x2$ и значением искомого решения. Вектор score показывает, насколько значения найденного решения в точке $x2$ близко к граничному условию в точке $x2$.

Пример 3. На отрезке $[1,2]$ найти решение уравнения:

$$y'' = \frac{3 \cdot y'^2}{2 \cdot y},$$

удовлетворяющее краевым условиям: $y(1)=1, y(2)=0,25$.

Ниже на рис. 3 приведен фрагмент рабочего документа MathCad, содержащий решения данной задачи.

Задание 3. На отрезке $[0, \frac{\pi}{3}]$ найти решение уравнения: $y'' = \frac{3 \cdot y'^2}{2 \cdot y} + 2 \cdot y$, удовлетворяющее краевым условиям: $y(0)=1, y(\frac{\pi}{3})=0,25$.

Практика ведения данного курса показала, что применение СКМ в учебном процессе существенно обогащает процесс обучения, стимулируется активная самостоятельная работа студентов, их интеллектуальное развитие. Использование графики, элементов форматирования, анимации создают обучающую среду с ярким и наглядным представлением информации. Приобретенные навыки используются при написании курсовых и дипломных работ, а также для интенсификации обучения при подготовке к экзаменам по различным разделам математики.

Список литературы

1. Лобанова. ОВ.. Практикум по решению задач в математической системе DERIVE. М.: Финансы и статистика, 1999.
2. Плис А.И., Сливина Н.А. Mathcad: математический практикум для экономистов и инженеров: Учеб. Пособие. - М., Финансы и статистика, 1999. - 656 с.: ил.
3. Семенов С.П., Славский В.В. Современные системы компьютерной алгебры. Известия АГУ, №1, Барнаул, 1998 г
4. Семенов С.П., Славский В.В. Системы компьютерной математики Изд-во АГУ, Барнаул, 2000 г.

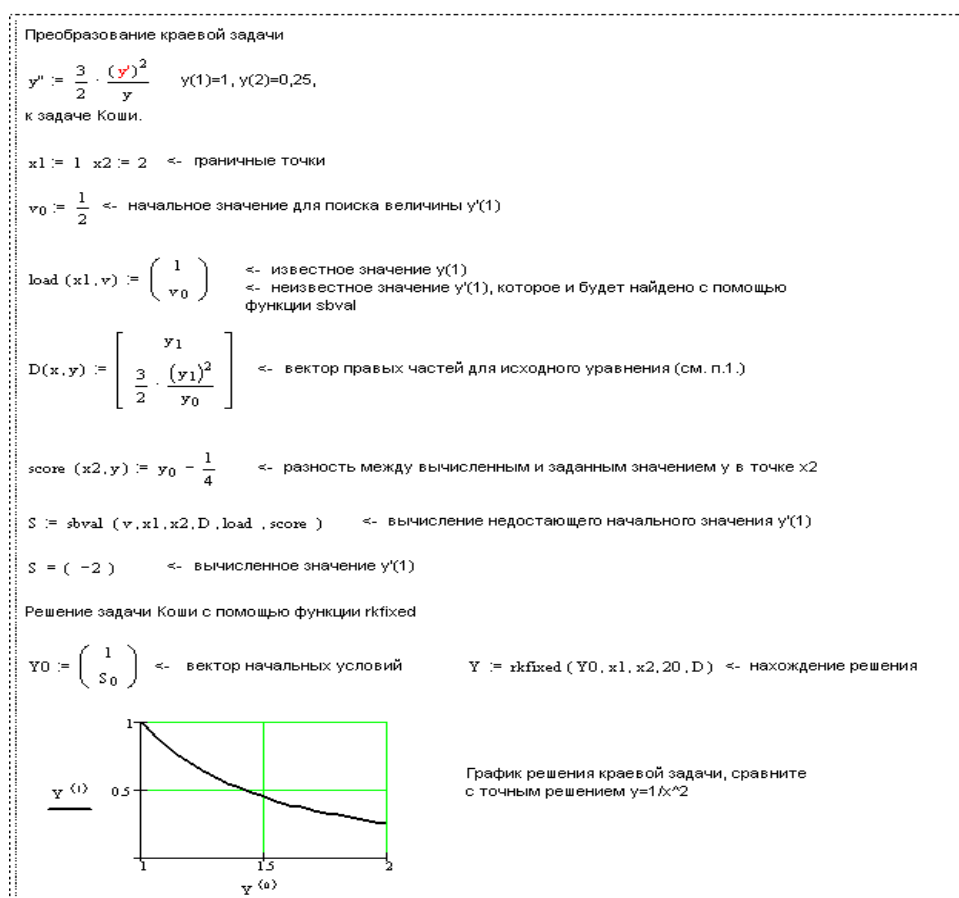


Рис. 3:

Сведения об авторах

Семенов Сергей Петрович

Адрес: Россия, 656099, Барнаул, ул. Димитрова, 66, АГУ, лаборатория компьютерной математики**тел:** (3852)36–70–18**e-mail:** ssp@math.dcn-asu.ru

Славский Виктор Владимирович

Адрес: Россия, 656099, Барнаул, ул. Димитрова, 66, АГУ**тел:** (3852)36–70–18**e-mail:** slav@math.dcn-asu.ru