Одномерная секционная кривизна однородных римановых многообразий

Е.Д. Родионов, В.В. Славский

Введение

В [11] исследовалась одномерная секционная кривизна римановых многообразий. В данной работе исследовано поведение одномерной секционной кривизны в случае однородных римановых пространств.

Основные факты

Пусть ∇ линейная связность Леви-Чивита римановой метрики $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ на многообразии M^n, R_{ijks} — тензор кривизны, R_{ij} — тензор Риччи, $Ric(\xi) = R_{ij}\xi^i\xi^j$ — кривизна Риччи в направлении единичного вектора ξ, R — скалярная кривизна метрики ds^2.

При исследовании римановых многообразий важную роль играет тензор, определяемый формулой

$$A_{ij} = \frac{1}{n-2}\left(R_{ij} - \frac{Rg_{ij}}{2(n-1)}\right). \tag{1}$$

Он представляет собой целую часть от деления риманова тензора кривизны на метрический тензор относительно произведения Кулкарни-Номидзу [4]. Используя тензор A_{ij} тензор кривизны можно представить в виде

$$R_{lkij} = W_{lkij} + g_{l,j}A_{k,i} + g_{k,i}A_{l,j} - g_{l,i}A_{k,j} - g_{k,j}A_{l,i},$$

где W_{lkij} — тензор Вейля.

Определение 1. *Одномерной секционной кривизной назовем величину*

$$A(\xi) = \frac{A_{ij}\xi^i\xi^j}{g_{ij}\xi^i\xi^j},$$

где ξ^i — произвольный вектор, задающий одномерную площадку.

Риманову кривизну двумерной площадки можно представить в виде

$$K(\xi\wedge\eta) = \frac{R_{ijkl}\xi^i\eta^j\xi^k\eta^l}{g_{ik}\xi^i\xi^k g_{jl}\eta^j\eta^l} = \frac{W_{ijkl}\xi^i\eta^j\xi^k\eta^l}{g_{ik}\xi^i\xi^k g_{jl}\eta^j\eta^l} + \frac{A_{ij}\xi^i\xi^j}{g_{ik}\xi^i\xi^k} + \frac{A_{kl}\eta^k\eta^l}{g_{jl}\eta^j\eta^l},$$

где ξ, η — ортогональный базис двумерной площадки. В частности, для конформно плоской метрики, или для трехмерного риманова многообразия, формула примет более простой вид

$$K(\xi\wedge\eta) = \frac{A_{ij}\xi^i\xi^j}{g_{ik}\xi^i\xi^k} + \frac{A_{kl}\eta^k\eta^l}{g_{jl}\eta^j\eta^l}.$$

С учетом вышеприведенных обозначений справедлива

Теорема 1. *Пусть (M^n, ds^2) — риманово многообразие. Тогда справедливы утверждения:*

1. *Если одномерная секционная кривизна $A(\xi)$ неотрицательна всюду на многообразии (M^n, ds^2), то кривизна Риччи также неотрицательна всюду на многообразии (M^n, ds^2). Более того, если в некоторой точке $p \in M^n$ существует вектор $\eta \in T_pM^n$ такой, что $Ric(\eta) = 0$, то кривизна Риччи в этой точке равна нулю.*
2. *Существуют римановы многообразия неотрицательной кривизны Риччи и осциллирующей одномерной секционной кривизны.*

Доказательство. В произвольной точке многообразия M^n рассмотрим ортонормированный базис $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, в котором квадратичная форма Риччи приобретает диагональный вид. Пусть $r_1, r_2, \dots, r_n$ — главные значения кривизн Риччи, тогда условие неотрицательности одномерной секционной кривизны равносильно выполнению системы неравенств

$$\begin{cases} r_1 - \frac{\sum r_i}{2(n-1)} \geq 0, \\ \dots \\ r_n - \frac{\sum r_i}{2(n-1)} \geq 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\sum_k \left(r_k - \frac{\sum r_i}{2(n-1)} \right) = \frac{n-2}{2(n-1)} \sum r_i \geq 0,$$

т.е. $\sum r_i \geq 0$, а это значит, что $r_k \geq \frac{\sum r_i}{2(n-1)} \geq 0$. Таким образом кривизна Риччи неотрицательна всюду на многообразии (M^n, ds^2).

Предположим теперь, что найдется точка $p \in M^n$ и вектор $\eta \in T_pM^n$ такой, что $Ric(\eta) = 0$. Тогда $A(\eta) = \frac{1}{n-2}\left(-\frac{R}{2(n-1)}\right) \geq 0$, следовательно скалярная кривизна $R = \sum r_i \leq 0$, и так как $r_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, то $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0$.

Для доказательства утверждения (2) теоремы рассмотрим случай, когда (M^n, ds^2) есть прямое риманово произведение компактных Эйнштейновых многообразий: $(M^n, ds^2) = (M_1, ds_1^2) \times \ldots \times (M_k, ds_k^2)$ с константами Эйнштейна $r_1 \geq 0, \ldots, r_k \geq 0$. Рассмотрим главные значения одномерной секционной кривизны в произвольной точке многообразия: $\frac{1}{n-2}\left(r_i - \frac{\sum r_i}{2(n-1)}\right)$. Если теперь достаточно сильно сжать метрику многообразия (M^n, ds^2) в направлении одного сомножителя (M_j, ds_j^2) , оставляя метрики на остальных сомножителях без изменений, то одномерная секционная кривизна примет значения разных знаков, а кривизна Риччи останется неотрицательной. □

Замечание 1. *Заметим, что если для одномерной секционной кривизны выполняется неравенство*

$$A_{ij}\xi^i\xi^j \geq \frac{1}{2}k_0 g_{ij}\xi^i\xi^j \quad \forall \xi \in T_x(M),$$

где k_0 — некоторая константа, то для кривизны Риччи выполняется неравенство

$$R_{ij}\xi^i\xi^j \geq (n-1)k_0 g_{ij}\xi^i\xi^j \quad \forall \xi \in T_x(M).$$

Замечание 2. *Нетрудно видеть, что условие постоянства кривизны Риччи $r_1 = r_2 = \cdots = r_n$, или эйнштейновости многообразия (M^n, ds^2), равносильно условию постоянства одномерной секционной кривизны*

$$r_1 - \frac{\sum r_i}{2(n-1)} = \cdots = r_n - \frac{\sum r_i}{2(n-1)}.$$

Одномерная секционная кривизна однородных римановых многообразий

Всюду в этом параграфе предполагается, что $M = G/H$ — однородное пространство, G — связная группа Ли, действующая эффективно на M диффеоморфизмами $r(y) : xH \to yxH$, H — компактная связная подгруппа Ли, g и h — алгебры Ли групп G и H соответственно, $[\cdot,\cdot]$ — скобка Ли алгебры g. Пусть $ad_\xi : \eta \to [\xi, \eta]$ — внутренний автоморфизм алгебры g, а $B(\xi, \eta) = -tr\ ad_\xi \circ ad_\eta$ — минус форма Киллинга алгебры g. В предположении компактности и полупростоты G форма $B(\xi, \eta)$ положительно определена, а G-однородная риманова метрика ds_B^2 на однородном пространстве G/H, полученная из $B(\xi, \eta)$ при естественной проекции $\pi : G \to G/H$, называется стандартной. Более того, если мы рассмотрим p — ортогональное дополнение к h в g относительно B, то можно отождествить G - инвариантные римановы метрики на G/H с $ad(h)$ — инвариантными скалярными произведениями на p, при этом секционная кривизна, кривизна Риччи и скалярная кривизна легко вычисляются с помощью $ad(h)$ - инвариантного скалярного произведения на p и скобки Ли $[\cdot,\cdot]$ алгебры g [4], а значит то же самое можно сказать и об одномерной секционной кривизне $A(\xi) = \frac{1}{n-2}\left(Ric(\xi) - \frac{R}{2(n-1)}\right)$ однородного риманова пространства.

Имеет место

Теорема 2. *Пусть $(G/H, ds^2)$ — однородное риманово многообразие. Тогда справедливы утверждения:*

1. *Если одномерная секционная кривизна $A(\xi)$ неотрицательна для любого вектора $\xi \in T_{\bar{e}}G/H$, то кривизна Риччи $Ric(\xi)$ неотрицательна для любого $\xi \in T_{\bar{e}}G/H$. Более того, если существует вектор $\eta \in T_{\bar{e}}G/H$ такой, что $Ric(\eta) = 0$, то $(G/H, ds^2)$ изометрично прямому риманову произведению плоского тора и евклидова пространства.*
2. *Существуют однородные римановы многообразия неотрицательной кривизны Риччи и осциллирующей одномерной секционной кривизны.*

Доказательство. Первая часть утверждения (1) теоремы следует из теоремы (1). Предположим, что найдется вектор $\eta \in T_{\bar{e}}G/H$ такой, что $Ric(\eta) = 0$. Тогда $A(\eta) = \frac{1}{n-2}\left(-\frac{R}{2(n-1)}\right) \geq 0$ и, чтобы избежать противоречия, мы должны предположить, что $(G/H, ds^2)$ является Риччи плоским, а значит согласно теореме Д.В.Алексеевского-Б.Н.Кимельфельда [2], плоским, т.е. изометрично произведению плоского тора на евклидово пространство.

Для доказательства утверждения (2) рассмотрим трехмерные унимодулярные группы Ли G с левоинвариантной римановой метрикой ds^2. Пусть r_1, r_2, r_3 — главные значения кривизны Риччи однородного риманова пространства (G, ds^2). Тогда условия неотрицательности кривизны Риччи и одномерной секционной кривизны запишутся в виде систем неравенств:

$$\begin{cases} r_1 \geq 0 \\ r_2 \geq 0 \\ r_3 \geq 0 \end{cases} \quad \text{для кривизны Риччи,}$$

$$\begin{cases} r_1 - \frac{\sum r_i}{4} \geq 0 \\ r_2 - \frac{\sum r_i}{4} \geq 0 \\ r_3 - \frac{\sum r_i}{4} \geq 0 \end{cases} \quad \text{для одномерной секционной кривизны.}$$

Теперь нетрудно видеть, что кривизна Риччи может быть неотрицательна, а одномерная секционная кривизна осциллировать, если главные значения кривизны Риччи r_1, r_2, r_3 попадут вне трехгранного угла, ограниченного плоскостями $\alpha : 3r_1 - r_2 - r_3 = 0$, $\beta : -r_1 + 3r_2 - r_3 = 0$, $\gamma : -r_1 - r_2 + 3r_3 = 0$, оставаясь в области неотрицательности кривизны Риччи. Для завершения доказательства воспользуемся теоремой О.Ковальского-С.Никчевич [9] в которой показано, что трехмерная унимодулярная группа Ли G с левоинвариантной римановой метрикой ds^2 и главными значениями кривизны Риччи r_1, r_2, r_3 существует тогда и только тогда, когда или $r_1 r_2 r_3 > 0$, или по крайней мере два из чисел r_1, r_2, r_3 равны 0. □

Замечание 3. *Нетрудно построить однородные римановы многообразия произвольной размерности, удовлетворяющие условию (2) теоремы 3.1.*

Критерий существования левоинвариантной римановой метрики положительной кривизны Риччи хорошо известен (см. Теорему 2.2 работы Дж.Милнора [8]), он следующий

Критерий 1. *Связная группа Ли допускает левоинвариантную риманову метрику положительной кривизны Риччи в том и только том случае, если она компактна, а ее фундаментальная группа конечна. Причем в качестве такой метрики для компактной группы Ли с конечной фундаментальной группой можно взять любую биинвариантную риманову метрику.*

Имеет место

Теорема 3. *Связная группа Ли допускает левоинвариантную риманову метрику положительной одномерной секционной кривизны в том и только том случае, если она компактна, а ее фундаментальная группа конечна. Причем в качестве такой метрики для компактной группы Ли с конечной фундаментальной группой можно взять стандартную однородную риманову метрику.*

Доказательство. Предположим, что $A(\xi) > 0\ \forall \xi \in T_eG$. Тогда $Ric(\xi) \geq 0\ \forall \xi \in T_eG$ согласно теореме 3.1 Если $Ric(\eta)$ для $\eta \in T_eG$, то (G, ds^2) является плоским, а значит одномерная секционная кривизна равна нулю - противоречие с предположением. Таким образом $Ric(\xi) > 0\ \forall \xi \in T_eG$, а это значит, что G — компактна, $\pi_1(G)$ — конечна согласно критерию.

Пусть G — компактна, а $\pi_1(G)$ — конечна. Тогда, в силу связности G, центр G тривиален, а G — полупростая компактная группа Ли. Пусть $G = G_1 \times \ldots \times G_s$ — прямое произведение компактных простых связных групп Ли; $g_1, g_2, \ldots, g_s$ — соответствующие алгебры Ли. Очевидно, что $B_g = B_{g_1} + B_{g_2} + \ldots + B_{g_s}$, где $g = g_1 \oplus g_2 \oplus \ldots \oplus g_s$. Более того [4], (G_i, B_{g_i}) являются стандартными однородными эйнштейновыми многообразиями с константами Эйнштейна $r_i = \frac{1}{4}$. Отсюда следует, что главные значения одномерной секционной кривизны имеют вид

$$\frac{1}{n-2}\left(r_i - \frac{\sum r_i}{2(n-1)}\right) = \frac{1}{n-2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\frac{n}{2(n-1)}\right) = \frac{1}{8(n-1)},$$

а значит одномерная секционная кривизна положительна. □

Замечание 4. *Произвольная биинвариантная риманова метрика на связной компактной полупростой группе Ли $G = G_1 \times \ldots \times G_s$ может не подходить в качестве метрики одномерной положительной секционной кривизны. В самом деле, пусть $(\cdot,\cdot)_{g\times g}$ — биинвариантная риманова метрика на G, тогда $(\cdot,\cdot) = \lambda_1 B_{g_1} + \lambda_2 B_{g_2} + \ldots + \lambda_s B_{g_s}$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ — положительные числа. Далее, если рассмотреть главные значения одномерной секционной кривизны $\frac{1}{n-2}\left(r_i - \frac{\sum r_i}{2(n-1)}\right)$, то очевидно, что если сделать λ_j, $j \in \{1,\ldots,s\}$ достаточно малым числом, оставляя остальные λ_i, $i \in \{1,\ldots,s\} \setminus \{j\}$ без изменений, то одномерная секционная кривизна примет значения разных знаков, хотя кривизна Риччи такой метрики будет положительной.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 99-01-00543, 00-15-96165).

Список литературы

1. Bourguignon J.P., Deschamps A., Sentenac P. // *Paris: Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* 1972, V. 5. P. 277-302.
2. Alekseevsky D.V., Kimelfeld B.V. // *The structure of homogeneous Riemannian spaces with zero Ricci curvature.* 1975, 9(2). P. 5-11.
3. Berger M. // *Ann. scuola norm. super Pisa. Sci. fis. e. mat.*, 1961, V. 15 P. 179-246.
4. Бессе А. *Многообразия Эйнштейна: В 2-х т.* — М.:Мир, 1990, 384с.
5. Wallach N.// *Ann. math.* 1972, V. 96. P. 277-295.
6. Bergery B.// *J. math. pures et appl.* 1976, V. 55. №. 1. P. 179-246.
7. Rodionov E.D. // *Homogeneous Riemannian Z-manifolds*, Ph.D. dissertation, MI of RAS, Novosibirsk, 1982.
8. Milnor J. *Curvature of left invariant metric on Lie groups.* Advances in mathematics. 21, 1976, P. 293-329.
9. Kowalski O., Nikcevic S.Z. *Eigenvalues of locally homogeneous riemannian 3-manifolds.* Geometriae Dedicata 62, 65-72, 1996.
10. Puttmann, Thomas. *Optimal pinching constants of odd dimensional homogeneous spaces*, Ph.D. dissertation, University of Bochum, 1998.
11. Родионов Е.Д., Славский В.В. *Конформная деформация римановых метрик с площадками нулевой кривизны на компактном многообразии* // Доклады Академии Наук, 373(3), 300-303, 2000.
12. Родионов Е.Д., Славский В.В. *Локально конформно однородные римановы пространства* // Известия АГУ, 1(19), 39-42, 2001.

Сведения об авторах

Родионов Евгений Дмитриевич

Адрес: Россия, 656099, Барнаул, пр. Социалистический, 126, БГПУ

тел: (3852)22–86–55

e-mail: rodionov@math.dcn-asu.ru

Славский Виктор Владимирович

Адрес: Россия, 656099, Барнаул, ул. Димитрова, 66, АГУ

тел: (3852)36–70–18

e-mail: slav@math.dcn-asu.ru