

Об одном достаточном условии унимодулярности группы Ли

С.В. Платонова

Введение

В статье Дж.Милнора была сформулирована теорема:

Пусть G - связная группа Ли. Если на G существует левинвариантная риманова метрика неотрицательной кривизны Риччи, тогда G унимодулярна,

и была дана идея доказательства теоремы.

В данной статье приводится подробное доказательство этой теоремы.

Обозначения и необходимые сведения

Пусть G - группа Ли.

Рассмотрим внутренний автоморфизм $I(y) : z \rightarrow yzy^{-1} \quad \forall z \in G$. Это гладкое отображение G на себя, поэтому можно рассмотреть дифференциал $dI(y)_e : g \rightarrow g$. Обозначим $\text{Ad}(y) = dI(y)_e$.

Группу Ли G , такую что $|\det \text{Ad}(y)| = 1 \quad \forall y \in G$ назовем унимодулярной.

Справедлива

Лемма 1. Пусть G - связная группа Ли, тогда G унимодулярна тогда и только тогда, когда $\text{tr}(\text{ad}X) = 0 \quad \forall X \in g$.

Доказательство. Пусть L - невырожденная матрица. Рассмотрим

$$e^L = \sum_n \frac{L^n}{n!}.$$

Имеем $L = TIT^{-1}$, где I - нормальная форма Жордана. Отсюда $L^n = T I^n T^{-1}$. Получаем $e^L = T e^I T^{-1}$, отсюда следует, что $\det(e^L) = \det(e^I) = e^{\text{tr}(I)} = e^{\text{tr}L}$, значит $\det(e^L) = e^{\text{tr}L}$ (1).

Рассмотрим $\exp : g \rightarrow G$. Имеет место формула $\text{Ad}(\exp X) = e^{\text{ad}X}$ (2) [3].

Из (1) и (2) получаем $\det \text{Ad}(\exp X) = \det e^{\text{ad}X} = e^{\text{tr}(\text{ad}X)}$.

Предположим, что группа G унимодулярна, т.е. $|\det \text{Ad}(\exp X)| = 1$. Тогда $e^{\text{tr}(\text{ad}(X))} = 1 = e^0$, отсюда $\text{tr}(\text{ad}(X)) = 0$.

Предположим, что $\text{tr}(\text{ad}(X)) = 0$, тогда $\det \text{Ad}(y) = 1$. Если $y \in U_e$, где U_e - некоторая малая окрестность единицы e , тогда в силу связности группы, G порождается U_e и следовательно $|\text{Ad}(y)| \equiv 1 \quad \forall y \in G$. Отсюда G - унимодулярна.

Лемма доказана.

Пусть g - алгебра Ли группы G . Рассмотрим тождество Якоби

$\text{ad}[X, Y] = \text{ad}(X)\text{ad}(Y) - \text{ad}(Y)\text{ad}(X)$. Найдем след обеих частей данного выражения: $\text{tr}(\text{ad}[X, Y]) = \text{tr}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y) - \text{ad}(Y)\text{ad}(X)) = 0$.

Рассмотрим гомоморфизм $\varphi : X \rightarrow \text{tr}(\text{ad}X)$ и ядро этого гомоморфизма $u = \{X \in g : \varphi(X) = \text{tr}(\text{ad}X) = 0\}$. Ясно, что u - унимодулярный идеал g и $[g, g] \subset u$.

Пусть $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ - ортонормированный базис алгебры g : $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_j^i$, $i, j \in 1, 2, \dots, n$, а ∇ - риманова связность метрической алгебры g . Определим

(1) тензор кривизны:

$$R(X, Y)Z = \nabla_{[X, Y]}Z + \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z,$$

(2) секционную кривизну:

$$K_{i,j} = \langle R(e_i, e_j)e_i, e_j \rangle,$$

(3) кривизну Риччи в направлении единичного вектора e_1 :

$$\text{ricc}(e_i) = \sum_{j=2}^n K_{1j}.$$

Пусть $u \perp m$. Рассмотрим оператор $L : u \rightarrow u$, где $L(z) = [b, z] \quad \forall z \in u$. Пусть $S = \frac{1}{2}(L + L^*)$ - самосопряженная часть оператора L , тогда $S = S^*$.

Пусть $\bar{\nabla}$ - риманова связность метрической алгебры u с римановой метрикой, индуцированной на u метрикой g .

Лемма 2. Справедливы равенства:

- 1) $\nabla_b b = 0 \quad \forall b \in m$,
- 2) $\nabla_b z = \frac{1}{2}(L - L^*)z \quad \forall z \in u, b \in m$,
- 3) $\nabla_z b = -Sz \quad \forall z \in u, b \in m$
- 4) $\nabla_z v = \overline{\nabla}_z v + \langle Sz, v \rangle b \quad \forall z, v \in u, b \in m$.

Доказательство.

1) По лемме Номидзу имеем: $\langle \nabla_b b, z \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle [b, b], z \rangle - \langle [b, z], b \rangle + \langle [z, b], b \rangle \} = 0, \quad \forall z \in g$.

2) Пусть $w \in u$, w - произвольный элемент, тогда: $\langle \nabla_b z, w \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle [b, z], w \rangle - \langle [z, w], b \rangle + \langle [w, b], z \rangle \} = \frac{1}{2} \{ \langle L(z), w \rangle - 0 + \langle L(w), z \rangle \} = \frac{1}{2}(L - L^*)z$,

3) $\langle \nabla_z b, w \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle [z, b], w \rangle - \langle [b, w], z \rangle + \langle [w, z], b \rangle \} = \frac{1}{2} \{ \langle -L(z), w \rangle - \langle L(w), z \rangle + 0 \} = -Sz \quad \forall w \in u$,

4) $\langle \nabla_z v, b \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle [z, v], b \rangle - \langle [v, b], z \rangle + \langle [b, z], v \rangle \} = \frac{1}{2} \{ 0 + \langle Lv, z \rangle + \langle Lz, v \rangle \} = \langle Sz, v \rangle$,

$\langle \nabla_z v, w \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle [z, v], w \rangle - \langle [v, w], z \rangle + \langle [w, z], v \rangle \} = \langle \overline{\nabla}_z v, w \rangle \quad \forall w \in u$.

Таким образом $\nabla_z v = \overline{\nabla}_z v + \langle Sz, v \rangle b \quad \forall z, v \in u$.

Лемма доказана.

Теорема. Пусть G - связная группа Ли. Если на G существует левоинвариантная риманова метрика неотрицательной кривизны Риччи, тогда G унимодулярна.

Доказательство. Пусть G - неунимодулярна, тогда, по лемме, существует $m = \{X \in g : \text{tr}(\text{ad}(X)) \neq 0\}$, такое что $g = u \oplus m = u \perp m$.

Пусть $\{e_1, \dots, e_s, e_{s+1}, \dots, e_n\}$ - ортонормированный базис g и $e_1, \dots, e_s \in m, e_{s+1}, \dots, e_n \in u$.

Имеем, по определению

$$\begin{aligned} \text{ricc}(e_1) &= \sum_{i=2}^n K_{1,i} = \sum_{i=2}^n \langle R(e_1, e_i)e_1, e_i \rangle = \\ &= \sum_{i=2}^n \langle \nabla_{[e_1, e_i]} e_1 + \nabla_{e_i} \nabla_{e_1} e_1 - \nabla_{e_1} \nabla_{e_i} e_1, e_i \rangle. \end{aligned}$$

(1) Найдем $K_{1,i}$ при $i = \overline{2, s}$. По лемме (6.6) из [2] имеем:

$$\begin{aligned} K_{1i} &= \frac{1}{2} \langle [[e_1, e_i], e_1], e_i \rangle + \frac{1}{2} \langle [[e_i, e_1], e_i], e_1 \rangle - \frac{3}{4} \| [e_1, e_1] \|^2 + \| U(e_1, e_i) \|^2 - \\ &\quad - \langle U(e_1, e_1), U(e_i, e_i) \rangle, \end{aligned}$$

где $u : 2 \langle u(x, y), z \rangle = \langle [z, x], y \rangle + \langle [z, y], x \rangle$. Учитывая, что $[e_i, e_j] \in u$ и $u \perp m$ получаем $K_{1i} = 0 + 0 - \frac{3}{4} \| [e_1, e_1] \|^2 + 0 + 0$.

Итак, при $i = \overline{2, s}$ $K_{1,i} < 0$.

(2) Найдем $K_{1,i}$ при $i = \overline{s+1, n}$.

Используя лемму 2, получаем $K(1, i) = \langle -SLe_i, e_i \rangle + \frac{1}{2} \langle (L - L^*)Se_i, e_i \rangle + 0$.

Если $e_i : Se_i = \lambda_i e_i$, то $\langle Le_i, e_i \rangle = \langle e_i, L^*e_i \rangle = \lambda_i$, а $K(1, i) = -\lambda_i^2$. Отсюда

$$\sum_{i=s+1}^n K_{1i} = - \sum_{i=s+1}^n \lambda_i^2,$$

причем

$$\sum_{i=s+1}^n K_{1i} = 0 \Leftrightarrow \lambda_{s+1} = \dots = \lambda_n = 0 \Leftrightarrow S = O \Leftrightarrow L + L^* = 0.$$

Заметим, что $L = \text{ad}(e_1)$ не может быть кососимметричным, т.е. $\Leftrightarrow L + L^* \neq 0$, т.к. в этом случае $\text{tr}(\text{ad}(e_1)) = 0$.

Из (1) и (2) заключаем, что $\text{ricc}(e_1) < 0$. Получено противоречие, отсюда следует, что $g = u$.

Теорема доказана.

Список литературы

1. Milnor J. *Curvature of left invariant metrics on Lie groups* // Advances in mathematics. 21, 1976. 293-329 p.
2. Родионов Е.Д. *Теория однородных римановых многообразий*. Спецкурс (в печати).
3. Хелгасон С. *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства*. М.: Мир, 1964.- 543с.

Сведения об авторе

Платонова Светлана Васильевна

Адрес: Россия, 656015, Барнаул, пр. Социалистический, 126, БГПУ

тел: (3852)36–54–36