

Об эйнштейновых метриках на многообразиях Штифеля

Ю.Г. Никоноров

В работе автора [2] рассматриваются однородные компактные пространства G/H с полупростой компактной группой движений G специального вида. Пусть $[\cdot, \cdot]$ — скобка Ли, а $B(\cdot, \cdot)$ — форма Киллинга алгебры g , и пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle = -B(\cdot, \cdot)$ — бинвариантная метрика.

Рассмотрим p — ортогональное дополнение к h в g относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Как и раньше, мы будем отождествлять инвариантные метрики на G/H с ad_h -инвариантными скалярными произведениями на p . Метрика $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ограниченная на p , называется стандартной.

Допустим, что пространство G/H таково, что модуль p представим в виде прямой суммы трех попарно ортогональных относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ad_h -инвариантных и неприводимых модулей, т.е. $p = p_1 \oplus p_2 \oplus p_3$, удовлетворяющих соотношениям $[p_i, p_i] \subset h$ для $i \in \{1, 2, 3\}$. Отметим, что приведенное условие близко по смыслу к условию локальной симметричности. Основным результатом работы [2] является

Теорема 1. Все пространства G/H , удовлетворяющие вышеприведенному условию, допускают инвариантную метрику Эйнштейна.

Отметим, что исследуемый класс пространств включает в себя пространства Уоллача, инвариантные эйнштейновы метрики на которых классифицированы в работе [3]. В работе [2] рассматривается множество других примеров однородных пространств, к которым применима вышеприведенная теорема.

Здесь мы представляем более подробное исследование инвариантных эйнштейновых метрик на пространствах $SO(n)/SO(n-2)$ (многообразия Штифеля). Ш. Кобаяси [1, 5] показал существование инвариантной метрики Эйнштейна ρ_K на таком пространстве при $n \geq 4$. Она получается с помощью расслоения

$$SO(n)/SO(n-2) = T_1 S^{n-1} \rightarrow B = SO(n)/(SO(n-2) \times SO(2))$$

единичных касательных векторов на сфере S^{n-1} со слоем $S^1 = SO(2)$. Метрика ρ_K такова, что описанное расслоение является римановой субмерсией с вполне геодезическими слоями, а метрика на базе $B = SO(n)/(SO(n-2) \times SO(2))$ является естественной симметрической метрикой.

Мы найдем все инвариантные эйнштейновы метрики на пространствах $M = SO(n)/SO(n-2)$ ($n \geq 3$). Отметим, что при $n = 3$ мы имеем проективное пространство $M = RP^3$, при $n = 4$ M диффеоморфно $S^2 \times S^3$, при $n \geq 4$ пространство M односвязно.

Теорема 2. При $n = 3$ и $n \geq 5$ пространство $M = SO(n)/SO(n-2)$ допускает ровно одну, с точностью до изометрии и пропорциональности, инвариантную метрику Эйнштейна. При $n = 4$ на пространстве M существует ровно две, с точностью до изометрии и пропорциональности, инвариантные эйнштейновы метрики.

Замечание 1. Как отмечалось выше, одна из эйнштейновых метрик есть метрика ρ_K , при $n = 4$ вторая метрика была найдена Д.В. Алексеевским, И. Дотти и С. Феррарисом [4] при классификации пятимерных однородных эйнштейновых многообразий.

Доказательство. При $n = 3$ существует единственная (с точностью до изометрий и пропорциональности) эйнштейнова метрика на $M = RP^3 = SO(3)$. Далее будем считать, что $n \geq 4$. Как и раньше, воспользуемся аппаратом алгебр Ли. Алгебра Ли $g = so(n)$ есть алгебра кососимметричных матриц. Рассмотрим на ней скалярное произведение $(A, B) = -\frac{1}{2} \text{trace}(A \cdot B)$. Пусть $T_{i,j}$ является матрицей, на пересечении i -ой строки и j -го столбца (j -ой строки и i -го столбца) стоит 1 (-1), а остальные элементы нулевые. Подалгебра $h = so(n-2)$ натянута на векторы $T_{i,j}$ при $0 < i < j \leq n-2$. Пусть $p_1 = \text{Lin}(T_{1,n-1}, T_{2,n-1}, \dots, T_{n-2,n-1})$, $p_2 = \text{Lin}(T_{1,n}, T_{2,n}, \dots, T_{n-2,n})$, $p_3 = \text{Lin}(T_{n-1,n})$. Нетрудно убедиться в том, что $g = h \oplus p_1 \oplus p_2 \oplus p_3 = h \oplus p$, модули p_i ad_h -инвариантны и неприводимы, попарно ортогональны и ортогональны h относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Заметим, что модули p_1 и p_2 ad_h -изоморфны, достаточно рассмотреть изоморфизм $\phi : p_1 \rightarrow p_2$ такой, что $\phi(T_{j,n-1}) = T_{j,n}$.

Рассмотрим теперь произвольное эйнштейново ad_h -инвариантное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на p . Диагонализуя его одновременно с $\langle \cdot, \cdot \rangle$ получаем $\langle \cdot, \cdot \rangle = x_1 \cdot (\cdot, \cdot)|_{q_1} + x_2 \cdot (\cdot, \cdot)|_{q_2} + x_3 \cdot (\cdot, \cdot)|_{p_3}$, где $q_1 \oplus q_2 = p_1 \oplus p_2$, $\dim(q_1) = \dim(q_2) = \dim(p_1) = \dim(p_2) = n-2$, модули q_i инвариантны и неприводимы относительно действия h .

Рассмотрим сначала случай $n \geq 5$. Не ограничивая общности, можно считать, что $q_1 = p_1$, $q_2 = p_2$. Для этого рассмотрим линейное пространство $r = \text{Lin}(T_{1,n-1}, p_2)$. Поскольку $\dim(r) + \dim(q_1) = 2n-3 > 2n-4 = \dim(p_1 \oplus p_2)$, то модуль q_1 содержит нетривиальный вектор $B = aT_{1,n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} b_i T_{i,n}$, где a

и b_k — вещественные числа. Допустим, что пересечение $q_1 \cap p_2$ нетривиально. Тогда в силу инвариантности и неприводимости модулей q_1 и p_2 относительно действия h получаем, что $q_1 = p_2$ и $q_2 = p_1$.

Далее будем считать, что $q_1 \cap p_2 = \{0\}$. Если $a = 0$, то пересечение $q_1 \cap p_2$ нетривиально. Пусть $a \neq 0$.

Рассмотрим вектор $C = \sum_{k=1}^{n-2} c_k T_{k,m}$, где $m = n-1$ или $m = n$. Тогда для вектора $T_{i,j} \in h$ ($0 < i < j \leq n-2$) выполняется равенство $[T_{i,j}, C] = c_j T_{i,m} - c_i T_{j,m}$.

В силу ad_h -инвариантности модуля q_1 при применении оператора $ad_{T_{i,j}}$ ($1 < i < j \leq n-2$) к вектору B мы опять получим вектор из q_1 . Следовательно, вектор $b_j T_{i,m} - b_i T_{j,m}$ принадлежит q_1 . В силу сделанного выше предположения ($q_1 \cap p_2 = \{0\}$), $b_i = b_j = 0$ при $2 \leq i < j \leq n-2$. Таким образом, модуль q_1 содержит вектор вида $\cos(\alpha)T_{1,n-1} + \sin(\alpha)T_{1,n}$. В силу ad_h -инвариантности он является линейной оболочкой векторов $A_i = \cos(\alpha)T_{i,n-1} + \sin(\alpha)T_{i,n}$. Модуль q_2 при этом есть линейная оболочка векторов $B_i = -\sin(\alpha)T_{i,n-1} + \cos(\alpha)T_{i,n}$.

Рассмотрим теперь внутренний автоморфизм алгебры Ли $so(n)$ вида $\psi(T) = QTQ^{-1}$, где

$$Q = Id \times \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Простые вычисления показывают, что $\psi(q_1) = p_1$, $\psi(q_2) = p_2$. Поскольку ψ оставляет h неподвижной, то мы получаем, что скалярное произведение $x_1 \cdot (\cdot, \cdot)|_{p_1} + x_2 \cdot (\cdot, \cdot)|_{p_2} + x_3 \cdot (\cdot, \cdot)|_{p_3}$ изометрично $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Поэтому, без ограничения общности можно считать, что $q_1 = p_1$, $q_2 = p_2$.

Поскольку $[p_1, p_1], [p_2, p_2], [p_3, p_3] \subset h$, мы получаем пример пространств, исследуемых в работе [2]. Отметим, что $d_1 = d_2 = n-2$, $d_3 = 1$, а форма Киллинга характеризуется равенством $-B(\cdot, \cdot) = 2(n-2) \cdot (\cdot, \cdot)$.

При подсчете относительно $-B$ получаем согласно работе [2] $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}$.

По лемме 2 из [2] приходим к следующей системе уравнений Эйнштейна.

$$\begin{aligned} \frac{2(n-2)}{x_1} + \frac{x_1}{x_2 x_3} - \frac{x_2}{x_1 x_3} - \frac{x_3}{x_1 x_2} &= (n-2)\lambda, \\ \frac{2(n-2)}{x_2} + \frac{x_2}{x_1 x_3} - \frac{x_1}{x_2 x_3} - \frac{x_3}{x_1 x_2} &= (n-2)\lambda, \\ \frac{2}{x_3} + \frac{x_3}{x_1 x_2} - \frac{x_1}{x_2 x_3} - \frac{x_2}{x_1 x_3} &= \lambda, \end{aligned}$$

где $\lambda/4 = r_1 = r_2 = r_3$. Вычитая из первого уравнения системы второе, получаем

$$\frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2 x_3} (x_1 + x_2 - (n-2)x_3) = 0,$$

откуда либо $x_2 = x_1$, либо $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{n-2}$.

Вычитая первое уравнение из третьего, умноженного на $n-2$, получаем

$$\frac{1}{x_1 x_2 x_3} (2(n-2)x_2(x_1 - x_3) + (n-1)(x_3^2 - x_1^2) - (n-3)x_2^2) = 0.$$

Если теперь $x_2 = x_1$, то

$$2(n-2)x_1(x_1 - x_3) + (n-1)(x_3^2 - x_1^2) - (n-3)x_1^2 = x_3((n-1)x_3 - 2(n-2)x_1) = 0,$$

то есть $x_3 = \frac{2(n-2)}{n-1}x_1$. Метрика, отвечающая таким параметрам, как раз и есть ρ_K .

Пусть теперь $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{n-2}$. Уравнение в этом случае таково:

$$2(n-2)x_2 \left(x_1 - \frac{x_1 + x_2}{n-2} \right) + (n-1) \left(\left(\frac{x_1 + x_2}{n-2} \right)^2 - x_1^2 \right) - (n-3)x_2^2 = 0.$$

Пусть $s = x_1/x_2$, после простых преобразований последнее уравнение приводится к

$$s^2 - 2 \frac{(n-3)(n-2)^2 + n-1}{(n-1)^2(n-3)} s + 1 = 0.$$

Условие неотрицательности дискриминанта полученного квадратного уравнения эквивалентно неравенству $n(n-5)+5=n^2-5n+5 \leq 0$, которое не выполняется при $n \geq 4$. Таким образом, при $n \geq 5$ получается лишь одна метрика Эйнштейна, а именно ρ_K .

Пусть теперь $n = 4$. Этот случай значительно сложнее. Пусть модуль q_1 содержит вектор $E_1 = y_1 T_{1,3} + y_2 T_{1,4} + y_3 T_{2,3} + y_4 T_{2,4}$. Тогда он в силу ad_h -инвариантности содержит также вектор $E_2 = y_3 T_{1,3} + y_4 T_{1,4} - y_1 T_{2,3} - y_2 T_{2,4} = [T_{1,2}, E_1]$. Более того, q_1 содержит и любой вектор вида $F = \cos(\beta)E_1 + \sin(\beta)E_2 = z_1 T_{1,3} + z_2 T_{1,4} + z_3 T_{2,3} + z_4 T_{2,4}$. Покажем, что β можно подобрать таким образом, что $z_1 z_3 + z_2 z_4 = 0$. Действительно, последнее уравнение равносильно уравнению $2(y_1 y_3 + y_2 y_4) \cos(2\beta) + (y_3^2 + y_4^2 - y_1^2 - y_2^2) \sin(2\beta) = 0$, которое, очевидно, разрешимо относительно β . Мы зафиксируем такое β и подействуем на вектор F внутренним автоморфизмом алгебры Ли $so(4)$ вида $\psi(T) = Q^{-1} T Q$, где

$$Q = Id \times \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}.$$

Понятно, что

$$\tilde{F} = \psi(F) = w_1 T_{1,3} + w_2 T_{1,4} + w_3 T_{2,3} + w_4 T_{2,4},$$

где $w_1 = z_1 \cos(\gamma) - z_2 \sin(\gamma)$, $w_2 = z_2 \cos(\gamma) + z_1 \sin(\gamma)$, $w_3 = z_3 \cos(\gamma) - z_4 \sin(\gamma)$, $w_4 = z_4 \cos(\gamma) - z_3 \sin(\gamma)$. Покажем, что выбором γ можно добиться одновременного выполнения равенств $w_2 = 0$ и $w_3 = 0$. Действительно, два последних уравнения имеют вид $z_2 \cos(\gamma) + z_1 \sin(\gamma) = 0$, $z_3 \cos(\gamma) - z_4 \sin(\gamma) = 0$. Выписанная система разрешима относительно γ , поскольку выполняется условие $z_1 z_3 + z_2 z_4 = 0$. Поскольку внутренний автоморфизм ψ действует неподвижно на h , то он переводит скалярные произведения на p в изометричные скалярные произведения. Поэтому, без ограничения общности, можно считать, что вектор $\tilde{F}$ принадлежит модулю q_1 . Таким образом, можно считать (исходя из ad_h -инвариантности и взаимной ортогональности модулей q_1 и q_2), что q_1 натянут на векторы $E_1 = \cos(\alpha)T_{1,3} + \sin(\alpha)T_{2,4}$, $E_2 = -\cos(\alpha)T_{2,3} + \sin(\alpha)T_{1,4}$; а q_2 — на векторы $E_3 = -\sin(\alpha)T_{1,3} + \cos(\alpha)T_{2,4}$, $E_4 = \sin(\alpha)T_{2,3} + \cos(\alpha)T_{1,4}$. Для упрощения дальнейших выкладок положим $E_5 = T_{3,4}$, $q_3 = \text{Lin}(E_5) = p_3$.

Нетрудно проверить выполнение следующих соотношений: $[T_{1,3}, T_{1,4}] = E_5$, $[T_{2,3}, T_{2,4}] = E_5$, $[T_{1,3}, T_{2,4}] \in h$, $[T_{2,3}, T_{1,4}] \in h$, $[E_1, E_2] = -[E_3, E_4] = \sin(2\alpha)E_5$, $[E_1, E_4] = -[E_2, E_3] = \cos(2\alpha)E_5$, $[E_1, E_3] = [E_2, E_4] = E_5$.

Для $i, j, k \in \{1, 2, \dots, s\}$ определим символы $\begin{bmatrix} k \\ i j \end{bmatrix}$ равенством

$$\begin{bmatrix} k \\ i j \end{bmatrix} = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} ([e_\alpha^i, e_\beta^j], e_\gamma^k)^2,$$

где $e_\alpha^i, e_\beta^j, e_\gamma^k$ обозначают векторы ортонормированного базиса в модулях q_i, q_j, q_k соответственно. Из бинвариантности скалярного произведения следует симметричность введенных символов относительно всех трех индексов. В качестве ортонормированных базисов в модулях q_1, q_2, q_3 мы выберем $\{E_1, E_2\}$, $\{E_3, E_4\}$, $\{E_5\}$ соответственно. Незануляющиеся символы (с точностью до перестановок символов) таковы: $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 1 \end{bmatrix} =$

$$2\sin^2(2\alpha), \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 2 \end{bmatrix} = 2\cos^2(2\alpha).$$

Пользуясь работой [6], выписываем скалярную кривизну S метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$S = S(\langle \cdot, \cdot \rangle) = \frac{4}{x_1} + \frac{4}{x_2} + \frac{2(1-c)}{x_3} - \frac{cx_3}{2} \left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \right) - (1-c) \left(\frac{x_1}{x_2 x_3} + \frac{x_2}{x_1 x_3} + \frac{x_3}{x_1 x_2} \right),$$

где $c = \sin^2(2\alpha)$. Учитывая ограничение на объем $x_1^2 x_2^2 x_3 = 1$, составляем функцию Лагранжа

$$\tilde{S} = S - \mu(x_1^2 x_2^2 x_3 - 1),$$

критические точки которой в точности соответствуют метрикам Эйнштейна. Выпишем условия критичности по x_i и c . Отметим, что $0 \leq c \leq 1$, причем, при $c = 0$ и $c = 1$ условие критичности по c излишне ($c = \sin^2(2\alpha)$).

$$-S'_{x_1} x_1 = \frac{4}{x_1} - \frac{cx_3}{x_1^2} - (1-c) \left(\frac{x_2}{x_1 x_3} + \frac{x_3}{x_1 x_2} - \frac{x_1}{x_2 x_3} \right) = -2\mu.$$

$$-S'_{x_2}x_2 = \frac{4}{x_2} - \frac{cx_3}{x_2^2} - (1-c) \left(\frac{x_1}{x_2x_3} + \frac{x_3}{x_1x_2} - \frac{x_2}{x_1x_3} \right) = -2\mu.$$

$$-S'_{x_3}x_3 = \frac{2(1-c)}{x_3} + \frac{cx_3}{2} \left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \right) - (1-c) \left(\frac{x_1}{x_2x_3} + \frac{x_2}{x_1x_3} - \frac{x_3}{x_1x_2} \right) = -\mu.$$

Условие критичности по c выглядит следующим образом

$$S'_c = \frac{(x_1 - x_2)^2}{2x_1^2x_2^2x_3} (2x_1x_2 - x_3^2) = 0.$$

Таким образом, при c отличном от 0 и 1 получаем $x_2 = x_1$ или $2x_1x_2 = x_3^2$. Следовательно, нам требуется разобрать четыре случая: $x_1 = x_2$, $2x_1x_2 = x_3^2$, $c = 1$ и $c = 0$. Система уравнений, выписанная выше, в каждом из этих случаев эквивалентна следующей системе:

$$0 = S'_{x_2}x_2 - S'_{x_1}x_1 = \frac{x_2 - x_1}{x_1^2x_2^2x_3} (4x_1x_2x_3 - (cx_3^2 + 2(1-c)x_1x_2)(x_1 + x_2)),$$

$$0 = S'_{x_1}x_1 - 2S'_{x_3}x_3 = \frac{1}{x_1^2x_2^2x_3} \times$$

$$\times (4(1-c)x_1^2x_2^2 - 4x_1x_2^2x_3 + cx_3^2(2x_2^2 + x_1^2) - (1-c)x_1x_2^3 - 3(1-c)x_1x_2(x_1^2 - x_3^2)).$$

Пусть $x_2 = x_1$. Из второго уравнения последней системы легко получается $x_3 = \frac{4}{3}x_1$, это метрика ρ_K .

Рассмотрим случай $2x_1x_2 = x_3^2$. Из первого уравнения системы получаем, что

$$4x_1x_2x_3 - (cx_3^2 + 2(1-c)x_1x_2)(x_1 + x_2) = 2x_3^3 - x_3^2(x_1 + x_2) = 0,$$

то есть $x_3 = \frac{x_1+x_2}{2}$. Из второго уравнения получаем

$$4(1-c)x_1^2x_2^2 - 4x_1x_2^2x_3 + cx_3^2(2x_2^2 + x_1^2) - (1-c)x_1x_2^3 - 3(1-c)x_1x_2(x_1^2 - x_3^2) =$$

$$= x_1x_2(10(1-c)x_1x_2 - 4x_2x_3 + (5c-1)x_2^2 + (5c-3)x_1^2) =$$

$$= x_1x_2((5c-3)x_1^2 + (8-10c)x_1x_2 + (5c-3)x_2^2) = 0$$

Кроме того, из уравнений $x_3 = \frac{x_1+x_2}{2}$ и $2x_1x_2 = x_3^2$ следует $x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2 = 0$. Таким образом, решение системы существует только тогда, когда $8 - 10c = -6(5c - 3)$, то есть $c = 1/2$. В этом случае получаем решения (с точностью до пропорциональности) $(x_1, x_2, x_3) = (3 + 2\sqrt{2}, 1, 2 + \sqrt{2})$ и $(x_1, x_2, x_3) = (1, 3 + 2\sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$. Понятно, что эти два решения соответствуют изометричным метрикам Эйнштейна (модули q_1 и q_2 "меняются" местами). Кроме того, все решения уравнения $c = \sin^2(2\alpha) = 1/2$ имеют вид $\alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Нетрудно убедиться, что при выборе двух произвольных значений α мы получим изометричные метрики (набор модулей $\{q_1, q_2\}$ один и тот же). Таким образом, в этом случае найдена еще одна инвариантная метрика Эйнштейна.

Пусть $c = 1$ ($x_1 \neq x_2$). Из первого уравнения получаем, что $4x_1x_2 = x_3(x_1 + x_2)$. Из второго уравнения следует равенство $4x_1x_2^2 = x_3(2x_2^2 + x_1^2)$. Поскольку $x_3 = \frac{4x_1x_2}{x_1+x_2}$, то получаем уравнение $t^2 - t + 1 = 0$ для $t = x_2/x_1$, не имеющее вещественных решений. Таким образом, в этом случае новых критических точек не нашлось.

Пусть теперь $c = 0$. Из первого уравнения получаем, что $x_3 = \frac{x_1+x_2}{2}$. Делая полученную подстановку во втором уравнении, приходим к равенству $9x_1^2 - 14x_1x_2 + 9x_2^2 = 0$. Поскольку последнее уравнение не имеет вещественных решений, то есть в случае $c = 0$ новых метрик Эйнштейна нет.

Таким образом, при $n = 4$, получаем 2 метрики Эйнштейна на многообразии, диффеоморфном $S^3 \times S^2$. Мы фактически нашли все эйнштейновы инвариантные метрики на пространстве $M_{(1,1)} = SU(2) \times SU(2)/S^1$, где вложение окружности задается в виде

$$e^{2\pi i\theta} \rightarrow \text{diag}(e^{2\pi i\theta}, e^{-2\pi i\theta}) \times \text{diag}(e^{2\pi i\theta}, e^{-2\pi i\theta}).$$

Как уже отмечалось, вторая метрика была получена в [4]. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов №00-15-96165, №99-01-00543).

Список литературы

1. Бессе А.Л. *Многообразия Эйнштейна*. М.: Мир, 1990.
2. Никоноров Ю.Г. Об одном классе однородных компактных многообразий Эйнштейна. // Сиб. мат. журнал.- 2000.- Т. 41, №1.- С. 200-205.
3. Родионов Е.Д. Эйнштейновы метрики на четномерных однородных пространствах, допускающих однородную риманову метрику положительной секционной кривизны. // Сиб. мат. журн.- 1991.- Т.32, №3.- С.126-131.
4. Alekseevsky D., Isabel Dotti, Ferraris S. *Homogeneous Ricci positive 5-manifolds*. // Pacific Journal of Mathematics.-1996.- V.175.- P.1-12.
5. Kobayashi S. *Topology of positively pinched Kaler manifolds*. // Tohoku Math. J. - 1963.- V.15.- P.121-139.
6. Wang M., Ziller W. *Existence and Non-existence of Homogeneous Einstein Metrics*. // Invent. Math.- 1986.- V.84.- P.177-194.

Сведения об авторе

Никоноров Юрий Геннадьевич

Адрес: Россия, 658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6, РИИ АлтГТУ

тел: (38557)3–87–86

e-mail: nik@inst.rubtsovsk.ru