

Отыскание частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения со специальным видом правой части

Е.Г. Никифорова

Известно, что общее решение неоднородного дифференциального уравнения есть сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения, причем частное решение неоднородного уравнения можно искать двумя разными способами: методом вариации произвольных постоянных и методом подбора решения по специальному виду правой части уравнения.

$$y_{\text{орн}} = y_{\text{оро}} + y_{\text{чрн}} \quad \begin{cases} \nearrow & 1) \text{ метод вариации} \\ \searrow & 2) \text{ метод специального вида правой части} \end{cases}$$

Часто объяснение второго способа выглядит или громоздко из-за составления всевозможных таблиц в качестве рекомендаций по подбору частного решения, либо непонятно из-за достаточной сложности общего вида частного решения. Предлагаем на наш взгляд короткий, легко запоминающийся способ объяснения поиска частного решения по специальному виду правой части.

Правая часть $f(x)$ имеет специальный вид, если

$$f(x) = e^{\alpha x} (P^n(x) \cos \beta x + Q^m(x) \sin \beta x).$$

При этом частное решение неоднородного уравнения выглядит следующим образом:

$$y_{\text{чрн}} = e^{\alpha x} x^r (\tilde{P}_l(x) \cos(\beta x) + \tilde{Q}_l(x) \sin(\beta x)), \text{ где } l = \max\{n, m\};$$

$$\tilde{P}_l(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_l x^l;$$

$$\tilde{Q}_l(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_l x^l;$$

r — сколько раз встречается корень $k_0 = \alpha + \beta i$ среди корней k_1, k_2 характеристического уравнения. На практике отыскание общего вида частного решения выглядит следующим образом. Во-первых, если в правой части содержался множитель $e^{\alpha x}$, то в частном решении он тоже будет, если же $e^{\alpha x}$ не входило в состав правой части, то и в частном решении его не будет. Во-вторых, по виду правой части составляем корень $k_0 = \alpha + \beta i$; если k_0 совпадает с корнями k_1, k_2 характеристического уравнения, то r — число таких совпадений и в составе частного решения появится множитель x^r . В третьих, если в составе $f(x)$ встречались тригонометрические выражения (синус или косинус), то в составе частного решения будет и синус и косинус. И, наконец, дописываются многочлены $\tilde{P}_l(x)$ и $\tilde{Q}_l(x)$.

Таким образом, нашего внимания требуют 4 пункта, назовем их кратко:

1. « e в степени»;
2. « x в степени»;
3. «тригонометрия»;
4. «многочлены».

Пример 1. Найти общий вид частного решения:

$$y'' - 4y' + 13y = (2x + 1)e^{2x} \sin(3x).$$

Составим и решим характеристическое уравнение

$$k^2 - 4k + 13 = 0$$

$$k = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3i; k_1 = 2 + 3i; k_2 = 2 - 3i.$$

$$k_0 = 2 + 3i.$$

Выпишем общий вид частного решения:

1. e^{2x} присутствует в правой части, значит, будет и в решении;
2. корень $2 + 3i$ совпадает с k_1 , значит, в составе частного решения будет множитель x ;
3. в правой части встречается тригонометрическое выражение $\sin(3x)$, значит, в решении будут содержаться и $\sin(3x)$, и $\cos(3x)$,

4. в правой части встречается $2x + 1$ — многочлен первой степени, значит, множителями перед $\tilde{P}_l(x)$ и $\tilde{Q}_l(x)$ будут линейные многочлены $ax + b$ и $cx + d$.

Тогда общий вид частного решения будет следующим :

$$y_{\text{чрн}} = e^{2x}((ax + b) \cos(3x) + (cx + d) \sin(3x)).$$

Пример 2. Найти общий вид частного решения:

$$y^{IV} - y'' = 4.$$

Решим характеристическое уравнение:

$$k^4 - k^2 = 0; k^2(k^2 - 1); k_1 = 0; k_2 = 0; k_3 = 1; k_4 = -1.$$

1. « e в степени» в правой части нет, значит, в решении его тоже не будет;
2. корень $k_0 = 0$, следовательно, имеется два совпадения с корнями k_1 и k_2 , значит, в решении будет присутствовать множитель x^2 ;
3. тригонометрических выражений нет;
4. многочлен, присутствующий в правой части — 4, т.е. константа, значит, в решении многочлен $\tilde{P}_l(x)$ есть константа A .

Итак,

$$y_{\text{чрн}} = Ax^2.$$

Пример 3. Найти частное решение

$$y'' + 9y = x^2 \sin(3x).$$

Найдем корни характеристического уравнения:

$$k^2 + 9 = 0; k_1 = 3i; k_2 = -3i.$$

1. « e^{2x} в степени» в правой части нет;
2. корень $k_0 = 3i$, следовательно, есть одно совпадение с корнями характеристического уравнения, значит, в решении будет множитель x ;
3. тригонометрическое выражение есть $\sin(3x)$, значит, в решении будут содержаться и $\sin(3x)$ и $\cos(3x)$
4. многочлен в правой части x^2 , т.е. многочлен второго порядка, значит, множителями перед $\sin(3x)$ и $\cos(3x)$ будут многочлены $ax^2 + bx + c$ и $px^2 + qx + d$.

В итоге частное решение выглядит следующим образом:

$$y_{\text{чрн}} = x((ax^2 + bx + c) \cos(3x) + (px^2 + qx + d) \sin(3x)).$$

Отыскание неизвестных констант в общем виде частного решения происходит обычным порядком по методу неопределенных коэффициентов.

Сведения об авторе

Никифорова Елена Геннадьевна

Адрес: Россия, 656099, Барнаул, пр. Ленина, 46, АлтГТУ, каф. высшей математики

тел: (3852)36–85–16