Исследование вейвлет-разложения финансовых временных рядов на стационарность

Н.С. Морозова, В.В. Славский

1. Введение

В последние десятилетия активно развивается теория финансовых временных рядов. Возникли новые журналы, такие как "Finance and Stochastic", посвященные этой тематике. Публикуется множество статей, в которых рассматриваются различные модели для финансовых временных рядов, основанных на теории Марковских процессов, теории стационарных процессов и т. д.

Главная особенность в разработке моделей временных рядов — предположение о некоторой форме статистического равновесия, в частности, колебания, относительно фиксированного среднего значения, то есть предположение о стационарности. Вследствие этого, значительное внимание уделяется исследованию временных рядов на стационарность. Например, моделирование финансовых процессов, таких как процесс инфляции, включает в себя проверку рядов на стационарность.

Наряду с этим, в последние годы появилось новое перспективное направление в исследовании временных рядов — вейвлет-анализ. Преимущества вейвлетов перед другими методами обработки данных послужили поводом для их интенсивного изучения. В настоящее время проводят различные исследования в этом направлении. Актуальным является вопрос и о стационарности вейвлет-разложения временного ряда. В данной работе исследуются закономерности в наличии стационарности для различных вейвлетов и для различных уровней разложения.

Напомним определение стационарности [2]. Пусть (Ω, F, P) — вероятностное пространство и $\xi = (\xi_1, \xi_2, ...)$ — некоторая последовательность случайных величин, или *случайная последовательность*. Обозначим через $\theta_k \xi$ последовательность $(\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, ...)$. Случайная последовательность ξ называется ***стационарной*** (***в узком смысле***), если для $\forall k \geq 1$ распределение вероятностей $\theta_k \xi$ и ξ: $P\left((\xi_1, \xi_2, ...) \in B\right) = P\left((\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, ...) \in B\right)$, $B \in \mathrm{B}\left(R^\infty\right)$, где $\mathrm{B}\left(R^\infty\right)$ - борелевская σ-алгебра. Простейшим примером такой последовательности ξ является последовательность $\xi = (\xi_1, \xi_2, ...)$, состоящая из независимых одинаково распределенных случайных величин. Отправляясь от такой последовательности, можно сконструировать широкий класс стационарных последовательностей $\eta = (\eta_1, \eta_2, ...)$, если взять произвольную борелевскую функцию $g\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ и положить $\eta_k = g(\xi_k, \xi_{k+1}, ..., \xi_{k+n})$.

Пусть теперь $H^2 = H^2\left(\Omega, F, P\right)$ — пространство (комплекснозначных) случайных величин $\xi = \alpha + i\beta \quad \alpha, \beta \in R$, с $M|\xi|^2 < \infty$, где $|\xi|^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Если $\xi, \eta \in H^2$, то положим

$$(\xi, \eta) = M\xi\overline{\eta}, \tag{1}$$

где $\overline{\eta} = \alpha - i\beta$ — комплексно-сопряженная величина к $\eta = \alpha + i\beta$

$$\|\xi\| = (\xi, \xi)^{1/2}.$$

В соответствии с терминологией функционального анализа пространство H^2 называется унитарным (иначе — комплексным) гильбертовым пространством (случайных величин, рассматриваемых на вероятностном пространстве (Ω, F, P)).

Если $\xi, \eta \in H^2$, то их ***ковариацией*** назовем величину

$$Cov\left(\xi, \eta\right) = M\left(\xi - M\xi\right)\left(\overline{\eta - M\eta}\right). \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что если $M\xi = M\eta = 0$, то

$$Cov\left(\xi, \eta\right) = \left(\xi, \eta\right). \tag{3}$$

Последовательность комплексных случайных величин $\xi = (\xi_n)_{n \in \mathrm{Z}}$ с
$M|\xi_n|^2 < \infty$, $n \in \mathrm{Z}$, называется ***стационарной (в широком смысле***),если для всех $n \in \mathrm{Z}$

$$M\xi_n = M\xi_0, \qquad Cov\left(\xi_{k+n}, \xi_k\right) = Cov\left(\xi_n, \xi_0\right), \quad k \in \mathrm{Z}.$$

2. Вейвлет-разложение стационарного сигнала

Обратимся теперь к стационарным сигналам. Пусть имеем стационарный сигнал : $s = \{..., s_0, s_1, ..., s_{2^n-1}, ...\}$. Рассмотрим для простоты случай конечного вероятностного пространства реализаций сигнала. Обозначим соответствующие реализации

$$
\begin{aligned}
s^0 &= \{..., s_0^0, s_1^0, ..., s_{2^n-1}^0, ...\},\\
s^1 &= \{..., s_0^1, s_1^1, ..., s_{2^n-1}^1, ...\},\\
&\dots,\\
s^p &= \{..., s_0^p, s_1^p, ..., s_{2^n-1}^p, ...\}.
\end{aligned}
$$

Будем предполагать, что вероятность каждой реализации есть $1/(p+1)$. Из определения стационарности следует, что математическое ожидание случайных величин постоянно, и их ковариация не зависит от выбора начального момента времени, а зависит лишь от сдвига по времени наблюдаемых величин, т. е.

$$
\begin{aligned}
M(s_0) = \frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p} s_0^i = M(s_k) = \frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p} s_k^i,\\
Cov(s_{t+r}, s_{t+j}) = \frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p} s_{t+r}^i \cdot s_{t+j}^i = A_{j-r}.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим один шаг в вейвлет-разложении стационарного сигнала. Пусть h_k — коэффициенты фильтра низких частот, g_k — коэффициенты фильтра высоких частот. Тогда один уровень в вейвлет-разложении сигнала задается двумя операторами H и G, определяемыми формулами

$$
(Hs)_l = \sum_{n=0}^{k} h_n s_{n+2l}, \quad (Gs)_l = \sum_{n=0}^{k} g_n s_{n+2l}, \qquad l \in Z.
$$

Которые осуществляют усреднение сигнала и выделение 'деталей' — вейвлет коэффициентов данного уровня.

Вычислим математическое ожидание и ковариационную функцию для $\bar{s} = Hs$:

$$
\begin{aligned}
M(\bar{s}_0) = M(\sum_{n=0}^{k} h_n s_n) = \sum_{n=0}^{k} h_n M(s_n) = \sum_{n=0}^{k} h_n M(s_{n+2l}) = M(\bar{s}_l),\\
Cov(\bar{s}_t, \bar{s}_{t+j}) = \frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p}(\sum_{n=0}^{k} h_n s_{n+2t}^i)(\sum_{n=0}^{k} h_n s_{n+2(t+j)}^i) =\\
= \frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p}\sum_{n,m=0}^{k} h_n h_m s_{n+2t}^i s_{m+2(t+j)}^i =\\
= \sum_{n,m=0}^{k} h_n h_m (\frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p} s_{n+2t}^i s_{m+2(t+j)}^i) = \sum_{n,m=0}^{k} h_n h_m A_{m-n+2j}.
\end{aligned}
$$

Аналогичные вычисления справедливы для Gs.

Таким образом, показали, что для одного шага в вейвлет-разложении сигнала математическое ожидание постоянно, а ковариационная функция не зависит от выбора начала отсчета. Следовательно вейвлет-разложение стационарного сигнала до произвольного уровня k есть сумма стационарных сигналов, а именно, усредненной составляющей и k — уровней "деталей". Очевидно, что вейвлет-разложение нестационарного сигнала может иметь как стационарные, так и нестационарные составляющие. Это утверждение позволяет нам наряду с исходным сигналом исследовать на наличие стационарности и его вейвлет-разложения.

3. Исследование финансовых временных рядов на стационарность

Так как при исследовании финансовых временных рядов мы имеем дело только с одной реализацией анализируемого процесса, то проверить ряд на стационарность, пользуясь непосредственно определением, становится невозможно. Для разрешения этой проблемы были разработаны определенные статистические методы проверки стационарности случайного процесса по отдельной его реализации. Мы использовали тест, предложенный в работе [1].

db1		d1	интервал	d2	интервал	d3	интервал	d4	интервал	d5	интервал
N=10	M	452	275	113	59	30	13	6	2	1	0
	D	277	428	65	112	15	32	5	8	1	1
N=8	M	700	455	170	100	37	16	10	3	2	1
	D	433	673	107	176	23	39	5	12	2	2
N=5	M	1623	1208	434	275	122	59	27	10	6	2
	D	1084	1646	272	428	68	112	16	26	5	8
N=2	M	10347	8120	2464	1929	694	435	170	100	38	20
	D	7087	9835	1860	2536	437	646	102	176	26	46

db2		средняя цена	интервал	d1	интервал	d2	интервал	d3	интервал	d4	интервал	d5	интервал
N=10	M	527	1208	412	275	86	59	21	10	6	2	1	0
	D	1080	1642	278	428	69	112	15	26	5	8	1	1
N=8	M	822	1929	612	455	147	100	36	20	11	3	3	1
	D	1681	2536	427	673	100	176	23	46	6	12	2	2
N=5	M	2170	5124	1651	1208	400	275	109	59	26	13	6	2
	D	4461	6352	1093	1646	265	428	77	112	14	32	5	8
N=2	M	13039	33582	8827	8120	2393	1929	583	455	165	109	30	24
	D	30593	38428	7639	9835	2074	2536	469	673	123	191	37	54

db3		d1	интервал	d2	интервал	d3	интервал	d4	интервал	d5	интервал
N=10	M	410	275	89	59	7	13	6	2	0	0
	D	292	428	75	112	15	32	5	8	1	1
N=8	M	655	455	133	100	24	20	10	3	1	1
	D	506	673	111	176	31	46	7	12	2	2
N=5	M	1643	1208	308	275	51	66	25	13	4	2
	D	1149	1646	275	428	71	124	25	32	6	8
N=2	M	9371	8120	2153	1929	435	475	200	119	30	29
	D	7903	9835	1901	2536	589	701	147	206	46	62

Рис. 1: РАОЕЕС.

3.1 Алгоритм для проверки стационарности исходного временного ряда и его вейвлет-разложения

Исходный временной ряд, либо его вейвлет-разложение разделяется на n равных интервалов, причем наблюдения в различных интервалах предполагаются независимыми.

Вычисляются оценки средних значений и дисперсии для каждого интервала и эти оценки располагаются в порядке возрастания номера интервала.

Полученная последовательность оценок $\{x_i\}_{i=\overline{1,n}}$ с помощью критерия инверсий проверяется на наличие тренда или других изменений во времени, которые не могут быть объяснены только выборочной изменчивостью оценок.

Предположим, что последовательность оценок есть выборка, составленная из независимых наблюдений над стационарной случайной последовательностью. Если эта гипотеза верна, то изменения последовательности оценок будут носить случайный характер и не будут содержать тренда. Тогда вероятное число инверсий будет таким же, как и для последовательности независимых наблюдений над рассматриваемой случайной величиной. Если же число инверсий окажется существенно иным, то гипотеза стационарности должна быть отвергнута. В противном случае гипотезу можно принять.

Метод инверсий состоит в том, что подсчитывается сколько раз в последовательности имеют место неравенства $x_i > x_j$ при $i < j$. Каждое такое неравенство называется инверсией. Если последовательность состоит из независимых исходов одной и той же случайной величины, то число инверсий является вполне определенной случайной величиной со средним значением $n(n-1)/4$ и дисперсией $n(2n+5)(n-1)/72$.

4. Заключение

С помощью описанного алгоритма в системе MATLAB проведено исследование вейвлет-разложения финансовых временных рядов на стационарность. Анализировались три финансовых временных ряда, а именно, цены акций компаний РАО ЕЕС, ЮГАНСКНЕФТЕГАЗ, СБЕРБАНК, длиной 760, 440, 80 значений соответственно. Исследовались на стационарность различные уровни разложения, для вейвлетов Добеши, имеющих нулевые моменты не выше второго порядка.

Из полученных результатов можно сделать вывод о том, что хотя исходные временные ряды не являются стационарными, однако определенные уровни разрешения их вейвлет-разложения являются стационарными с достаточно высокой степенью значимости. В дальнейшем предполагается изучение этих уровней разрешения вейвлет-разложения, а также исследование общих временных рядов с применением вейвлет-анализа.

На рис. 1. отражены результаты исследования временного ряда курса акций компании РАО ЕЕС длины 760 значений за период с 01.09.95 по 31.07.97. Доверительные интервалы соответствуют уровню 0.95. Темным цветом выделены те уровни вейвлет-разложения, которые с данной степенью значимости можно считать стационарными. В таблице использованы обозначения:

- N — число элементов в интервале,
- M — число инверсий для оценок средних значений,
- D — число инверсий для оценок дисперсий,
- db1, db2, db3 — используемые вейвлеты,
- d1,d2,d3,d4,d5 — уровни разложения.

Список литературы

1. Бендат Дж., Пирсол Алан Дж. *Прикладной анализ случайных данных*. — М.: Мир, 1989.
2. Ширяев А.Н. *Вероятность*. — М.: Наука, 1989.

Сведения об авторах

Морозова Наталья Сергеевна
Адрес: Россия, 656099, Барнаул, ул. Димитрова, 66, АГУ
тел: (3852)36–70–18
e-mail: slav@math.dcn-asu.ru

Славский Виктор Владимирович
Адрес: Россия, 656099, Барнаул, ул. Димитрова, 66, АГУ
тел: (3852)36–70–18
e-mail: slav@math.dcn-asu.ru