Использование теоремы Котельникова-Шеннона при интерполяции временного ряда

М.Ю. Миронова

Имеется класс задач, в которых экспериментальный временной ряд представляет собой последовательность неравномерных отсчетов. Под *отсчетами* понимается последовательность значений $f(t_k)$, где k — целые. Отсчеты называются *равномерными*, если $t_k = \Delta$ для некоторого Δ в противном случае $f(t_k)$ — *неравномерные* отсчеты. Пусть моменты отсчетов разделены на группы по N точек, которые повторяются периодически. Внутри группы допускается произвольное расположение точек - моментов отсчетов; такие неравномерные отсчеты назовем периодическими. Если же точки внутри группы следуют друг за другом через равные интервалы времени, то отсчеты, соответствующие таким момента, назовем циклическими.

С такими временными рядами приходится сталкиваться, в частности, в медицине и биологии, поскольку, как правило, нет возможности производить замеры параметров и заборы анализов круглосуточно. В этих случаях экспериментальный ряд обычно представлен неравномерными отсчетами. Например, забор анализа производится n раз в сутки с интервалом времени $24/n$и с суточным пропуском. Схематически эти неравномерные циклические отсчеты можно представить следующим образом:

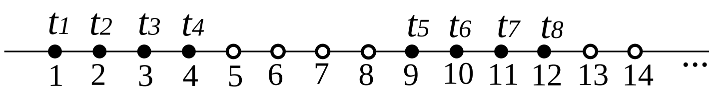

Рис. 1:

Возникает задача построения сигнала fиз неравномерных отсчетов $f(t_k)$ (где k — целые) — задача интерполяции временного ряда. Но в случае, когда основным объектом исследования является не сам временной ряд, а его спектр, решением интерполяционной задачи можно считать восстановление спектра. Целесообразно обратиться к теореме Котельникова-Шеннона (КШ), когда имеется априорная информация об ограниченности спектра функции f.

1. Теорема Котельникова-Шеннона

Определим пространство $\boldsymbol{B}_\Omega$ следующим образом:

$$B_\Omega = \left\{ f \in L^2(R) : \hat{f}(\omega) = 0 \text{ для } |\omega| > \Omega \right\} \tag{1}$$

где $\hat{f}$ — преобразование Фурье функции f.

$$\hat{f}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt \tag{2}$$

Предположим, что $f(t) \in B_\Omega$. Тогда для функции $f(t)$имеет место представление:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\Delta) \frac{\sin \frac{\pi}{\Delta}(t - k\Delta)}{\frac{\pi}{\Delta}(t - k\Delta)}, \tag{3}$$

где $\Delta = \pi/\Omega$.

Обычно в этом виде формула приводится в литературе по теории передачи информации.

Формула (3) показывает, что для восстановления на приемном конце канала связи сообщения, описываемого функцией $f(t)$ с ограниченным спектром нет необходимости передавать все значения функции $f(t)$, определенные на всей оси $-\infty < t < \infty$, а достаточно передавать лишь значения этой функции $f(k\Delta)$, называемые отсчетами, через равные интервалы $\Delta = \pi/\Omega$ [1, с.107].

Но в реальных условиях невозможно передавать неограниченное количество отсчетов, требуемое для восстановления функции по теореме КШ. Если же передать лишь конечное число отсчетов, то применение интерполяционной формулы (3) без дополнительных ограничений приводит к неединственности. Для того, чтобы решение интерполяционной задачи было единственным, нужно сузить класс функций, в котором решается интерполяционная задача.

Например, можно положить равными нулю все отсчеты, кроме измеряемых. Тогда в случае равномерных отсчетов в моменты времени $t_1 < t_2 < \ldots < t_N$, получаем следующее общее представление:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{N} f(k\Delta)\frac{\sin\frac{\pi}{\Delta}(t-k\Delta)}{\frac{\pi}{\Delta}(t-k\Delta)}, \tag{4}$$

где $\Delta = {}^{\pi}/_{\Omega}$, $N = {}^{T}/_{\Delta}$.

2. Фреймы и неравномерные отсчеты

Использование фреймов является подходящим инструментом для интерполяции функции.

Определение 2.1 Последовательность $\{f_j\}_{j\in \mathrm{Z}}$ в сепарабельном Гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$ называется *фреймом $\boldsymbol{H}$,* если существуют константы (фреймовые ограничения) $A, B{>}0$ такие, что

$$A\|f\|^2 \le \sum_j |\langle f, f_j\rangle|^2 \le B\|f\|^2, \forall f \in H. \tag{5}$$

Фрейм $\{f_j\}_{j\in \mathrm{Z}}$ называется точным, если при исключении из последовательности $\{f_j\}_{j\in \mathrm{Z}}$ хотя бы одного элемента он не будет фреймом. Фрейм $\{f_j\}_{j\in \mathrm{Z}}$ называется *плотным*, если $A{=}B$.

Примеры. Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис пространства $\boldsymbol{H}$.

- $\{e_1, e_1, e_2, e_2, e_3, e_3, ...\}$ — плотный неточный фрейм с ограничениями $A{=}B{=}2$, но это не ортонормированный базис.
- $\{e_1, e_2/2, e_3/3, ...\}$ — ортогональный базис, но не фрейм.
- $\{2e_1, e_2, e_3, ...\}$ — неплотный точный фрейм с ограничениями $A{=}1$, $B{=}2$.

Определим *анализирующий* оператор T:

$$T : f \in H \to Ff = \{\langle f, f_j\rangle\} j \in \mathrm{Z} \tag{6}$$

и *синтезирующий* оператор, который является сопряженным к T, следующим образом:

$$T^* : c \in l^2\,(\mathrm{Z}) \to T^*c = \sum_j c_j f_j. \tag{7}$$

Фреймовый оператор определим как $S = T^*T$; здесь $Sf = \sum_j \langle f, f_j\rangle f_j$. S ограничен следующим образом: $AI \le S \le BI$.

Можно представить оператор $R = TT^*$ в виде матрицы Грамма $R : l^2(\mathrm{Z}) \to l^2(\mathrm{Z})$ с $R_{j,l} = \langle f_j, f_l\rangle$. На $\Re(T) = \Re(R)$ матрица R ограничена: $AE \le R \le BE$. Справедлива теорема.

Теорема 1. *Если дан фрейм $\{f_j\}_{j\in \mathrm{Z}}$ для $\boldsymbol{H}$, то любой элемент $f \in H$ представим в виде:*

$$f = \sum_{j\in \mathrm{Z}} \langle f, f_j\rangle \gamma_j = \sum_{j\in \mathrm{Z}} \langle f, \gamma_j\rangle f_j, \tag{8}$$

где элементы $\gamma_j = S^{-1} f_j$ — дуальный фрейм.

Формула (8) утверждает, что если множество $\{f_j\}_{j\in \mathrm{Z}}$ образует фрейм для $\boldsymbol{H}$, то можно восстановить функцию $f \in H$ по ее моментам $\langle f, f_j\rangle$. Теорема отсчетов тесно связана с теорией фреймов, введем *sinc*-функцию:

$$\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}. \tag{9}$$

Теорема 2. *Если множество$\{\mathrm{sinc}(\,\cdot - t_j)\}_{j\in \mathrm{Z}}$ является фреймом для $\boldsymbol{B}_{1/2}$, тогда функция $f \in H$ единственным образом определяется своими отсчетами $\{f(t_j)\}_{j\in \mathrm{Z}}$. В этом случае f восстанавливается из отсчетов следующим образом:*

$$f(t) = \sum_{j\in \mathrm{Z}} f(t_j)\gamma_j, \textit{где} \quad \gamma_j = S^{-1}\mathrm{sinc}(\,\cdot - t_j) \tag{10}$$

или эквивалентным образом:

$$f(t) = \sum_{j\in \mathrm{Z}} c_j \mathrm{sinc}(t - t_j), \textit{где} \quad Rc = b \tag{11}$$

с R — матрицей Грамма с $R_{j,l} = \mathrm{sinc}(t_j - t_l)$ и $b = \{b_j\} = \{f(t_j)\}$.

Возникает задача проверки того, что множество $\{\mathrm{sinc}(\,\cdot\, - t_j)\}_{j\in\mathrm{Z}}$ является фреймом пространства $\boldsymbol{B}$ (или, что эквивалентно, проверке множества $\left\{e^{2\pi i w t_j}\right\}_{j\in\mathrm{Z}}$ на свойство быть фреймом для пространства $L^2\,(-a,a)$.)

В [2] приведена следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть* $\{\lambda_k\}_{k\in\mathrm{Z}}, \{\mu_\mathrm{k}\}_{k\in\mathrm{Z}} \subseteq R$. *Предположим, что* $\left\{e^{i\omega\mu_k}\right\}_{k\in\mathrm{Z}}$ — *фрейм пространства* $L^2\,(-\pi,\pi)$ *с ограничениями* A, B. *Если существует число* $L < 1/4$ *такое, что*

$$|\mu_n - \lambda_n| \le L \text{ и } 1 - \cos\pi L + \sin\pi L < \sqrt{\frac{A}{B}}, \tag{12}$$

тогда $\left\{e^{i\omega\lambda_k}\right\}_{k\in\mathrm{Z}}$ — *фрейм пространства* $L^2\,(-\pi,\pi)$ *с ограничениями*

$$A\left(1 - \sqrt{\frac{B}{A}}\,(1 - \cos\pi L + \sin\pi L)\right)^2, B\,(2 - \cos\pi L + \sin\pi L)^2\,. \tag{13}$$

Следствие 1. *Пусть* $\{\lambda_k\}_{k\in\mathrm{Z}}, \{\mu_\mathrm{k}\}_{k\in\mathrm{Z}} \subseteq R$. *Предположим, что* $\left\{e^{i\omega\mu_k}\right\}_{k\in\mathrm{Z}}$ — *фрейм пространства* $L^2\,(-a,a)$ *с ограничениями* A, B. *Если существует число* $L < 1/4$ *такое, что*

$$|\mu_n - \lambda_n| \le \frac{L\pi}{a} \text{ и } 1 - \cos\pi L + \sin\pi L < \sqrt{\frac{A}{B}}, \tag{14}$$

тогда $\left\{e^{i\omega\lambda_k}\right\}_{k\in\mathrm{Z}}$ — *фрейм пространства* $L^2\,(-a,a)$ *с ограничениями*

$$A\left(1 - \sqrt{\frac{B}{A}}\,(1 - \cos\pi L + \sin\pi L)\right)^2, B\,(2 - \cos\pi L + \sin\pi L)^2\,. \tag{15}$$

Следствие 2. *Пусть* $\{\lambda_k\}_{k\in\mathrm{Z}} \subseteq R$, $\mu_k = k\cdot\Delta$, $k\in\mathrm{Z}$, $\Delta\cdot a = \pi$. *Тогда* $\left\{e^{i\omega\mu_k}\right\}_{k\in\mathrm{Z}}$ — *фрейм пространства* $L^2\,(-a,a)$ *с ограничениями* $2a, 2a$. *Если существует число* $L < 1/4$ *такое, что*

$$|\mu_n - \lambda_n| \le L\Delta, \tag{16}$$

тогда $\left\{e^{i\omega\lambda_k}\right\}_{k\in\mathrm{Z}}$ — *фрейм пространства* $L^2\,(-a,a)$ *с ограничениями*

$$2a(1 - \sin 2\pi L), \quad 2a\,(2 - \cos\pi L + \sin\pi L)^2\,. \tag{17}$$

3. Один из способов интерполяции

Пусть имеется временной ряд, представленный неравномерными циклическими отсчетами $f(\lambda_k)$, где последовательность $\{\lambda_k\}_{k\in\mathrm{Z}} \subseteq R$ разбита на подгруппы, состоящие из p точек, с r пропусками между подгруппами:

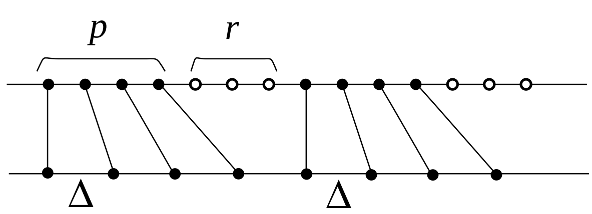

Рис. 2:

Теорема 4. *Пусть* $f \in B_a$, $a\Delta = \pi$, $p > 1$. *Если выполняется неравенство*

$$\frac{3p}{4p-3} < r < \frac{5p}{4p-5},$$

то значения f *восстанавливаются в пропусках.*

Список литературы

1. Хургин Я.И., Яковлев В.П. *Методы теории целых функций в радиофизике теории связи и оптике*. М: Наука, 1962.
2. Christensen O., Lindner A.M. *Frames of exponentials: lower frame bounds for finite subfamilies and approximation of the inverse frame operator*. // Linear Algebra and its Applications 323 (2001) 117-130.
3. Hell C.E., Walnut D.F. *Continuous and discrete wavelet transforms*. // Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. 31, No. 4, 1989 pp.628-666.
4. Seip K. *On the connection between exponential bases and certain related sequences in . . . .* // J. Funct. Anal. 130 (1995) 131-160.
5. Strohmer T. *Numerical analysis of non-uniform sampling problem*. // J. Of Computational and Applied Mathematics 122 (2000) 297-316.

Сведения об авторе

Миронова Марина Юрьевна

Адрес: Россия, 656099, Барнаул, ул. Димитрова, 66, АГУ

тел: (3852)36—70—18

e-mail: slav@math.dcn-asu.ru