Об одной задаче Л.Ф. Тота

Н.В. Лысенко, Ю.Г. Никоноров

Пусть P — выпуклый n-угольник на евклидовой плоскости со сторонами длины $a_1,...,a_n$. Обозначим через b_i длину наибольшей хорды n-угольника P, параллельной стороне a_i.

Рассмотрим величину

$$\mu(P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i}.$$

Отметим, что $\mu(P)$ является аффинным инвариантом. Л.Ф. Тот в работе [1] показал, что $\sqrt{8} < \mu(P) \leq 4$, и предположил, что $3 \leq \mu(P) \leq 4$, где равенство слева выполняется, если P — усеченный треугольник, и равенство справа выполняется, если P — параллелограмм. В данной работе мы обосновываем это предположение Л.Ф. Тота. Обсуждение этой задачи и ее аналогов можно найти в [2].

Выпуклый шестиугольник $P = A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ будем называть усеченным треугольником, если для некоторого треугольника $B_1B_2B_3$ на плоскости выполняются следующие условия:

1) точки A_1 и A_2 лежат на отрезке B_1B_2, точки A_3 и A_4 лежат на отрезке B_2B_3, точки A_5 и A_6 лежат на отрезке B_1B_3;

2) треугольники $B_1A_1A_6$, $A_2B_2A_3$ и $A_5A_4B_3$ попарно конгруэнтны.

Таким образом, усеченный треугольник получается отсечением трех попарно конгруэнтных треугольников от углов некоторого треугольника. Нетрудно понять, что треугольники из пункта 2 определения гомотетичны треугольнику $B_1B_2B_3$. Отметим, что для каждой стороны усеченного треугольника найдется параллельная ей сторона.

Основным результатом является

Теорема 1. *Для произвольного выпуклого многоугольника P выполняется неравенство $3 \leq \mu(P) \leq 4$. Равенство $\mu(P) = 3$ равносильно тому, что P — усеченный треугольник, равенство $\mu(P) = 4$ равносильно тому, что P — параллелограмм.*

Существенную роль для доказательства предположения Тота играет результат Ю.Г. Решетняка [3]. Рассмотрим на плоскости метрику Минковского, единичным кругом которой является выпуклая центрально-симметричная фигура U. Пусть кривая ∂U является границей U, а $2\pi_M$ — длина кривой ∂U в рассматриваемой метрике.

В свое время К.П. Персидским была поставлена задача о нахождении точных верхней и нижней границ чисел π_M. Эта задача была решена Ю.Г. Решетняком в работе [3], где были установлены неравенства $\pi_M \geq 3$ и $\pi_M \leq 4$. Нетрудно убедиться в том, что первое из этих неравенств обращается в равенство в случае правильного шестиугольника, а второе — в случае квадрата. Для наших целей необходимо выявить все случаи, когда выполняются равенства $\pi_M = 3$ и $\pi_M = 4$. Мы получим соответствующий результат, существенно используя конструкции работы [3].

Будем называть шестиугольник аффинно правильным, если он является образом правильного шестиугольника при невырожденном аффинном преобразовании плоскости.

Справедливо следующее уточнение результата работы [3].

Теорема 2. *Для любой метрики Минковского на плоскости справедливо неравенство $3 \leq \pi_M \leq 4$. Равенство $\pi_M = 3$ имеет место, если и только если, U является аффинно правильным шестиугольником. Равенство $\pi_M = 4$ имеет место, если и только если, U является параллелограммом.*

Замечание 1. *Нетрудно убедиться, что для центрально-симметричного многоугольника P справедливо равенство $\mu(P) = \pi_M$ в метрике Минковского, единичным кругом которой является P. Это наблюдение играет центральную роль в доказательстве теоремы 1.*

Выпуклой кривой на плоскости будем, как обычно, называть границу невырожденной выпуклой фигуры. Для произвольной кривой γ на плоскости через $l_M(\gamma)$ будем обозначать длину этой кривой в соответствующей метрике Минковского.

Для доказательства теоремы 2 используются 4 нижеприведенные леммы.

Лемма 1. *Пусть выпуклая кривая γ_1 лежит внутри кривой γ_2, тогда $l_M(\gamma_1) \leq l_M(\gamma_2)$.*

Лемма 2. *Пусть точки A, B и C — попарно различные точки на плоскости. Векторы $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$, $\overline{OR}$, ($P, Q, R \in \partial U$, O — центр U) сонаправлены с векторами $\overline{AB}$ $\overline{BC}$ $\overline{AC}$ соответственно. Тогда если $l_M(AC) = l_M(AB) + l_M(BC)$, то точка R лежит на отрезке PQ.*

Лемма 3. *Пусть γ_1 и γ_2 — единичные окружности относительно выбранной метрики Минковского с центрами O_1 и O_2 соответственно. Если $0 < l_M(O_1O_2) < 2$, то пересечение рассматриваемых окружностей состоит из двух точек.*

Лемма 4. *Пусть центрально-симметричный выпуклый шестиугольник V обладает тем свойством, что любая его сторона параллельна диагонали, проходящей через центр симметрии. Тогда V — аффинно правильный шестиугольник.*

Согласно замечанию 1, для доказательства неравенства $3 \leq \mu(P) \leq 4$ теоремы 1, нам достаточно построить центрально-симметричный многоугольник $S(P)$ с условием $\mu(S(P)) = \mu(P)$. Здесь мы опишем соответствующую конструкцию.

Построим для многоугольника P симметричный ему многоугольник P' относительно некоторой точки O. Рассмотрим многоугольник $S(P) = 1/2(P+P')$ — полусумму Минковского многоугольников P и P' [4]. Опишем более подробно это построение. В дальнейшем будем отождествлять точки с их радиус-векторами, исходящими из некоторого общего начала (например, точки O).

Пусть M — произвольная точка многоугольника P, M' — произвольная точка многоугольника P', L — середина отрезка MM'. Если M и M' будут пробегать многоугольники P и P' соответственно, то точка L опишет также выпуклый многоугольник $S(P) = \frac{1}{2}(P + P')$. Действительно, если L_1 и L_2 — две точки в многоугольнике $S(P)$, то соединяющий их отрезок лежит в $S(P)$, поскольку из равенств $L_1 = \frac{1}{2}(M + M')$ и $L_2 = \frac{1}{2}(N + N')$ следует

$$(1-\theta)L_1 + \theta L_2 = \frac{1}{2}((1-\theta)M + \theta N) + \frac{1}{2}((1-\theta)M' + \theta N'),$$

где $0 \leq \theta \leq 1$, $(1-\theta)M + \theta N \in P$, $(1-\theta)M' + \theta N' \in P'$.

Точка $L = \frac{1}{2}(M + M')$ является граничной в многоугольнике $S(P)$ только в том случае, если M и M' — граничные точки многоугольников P и P', причем такие, что через M и M' проходят параллельные опорные прямые для P и P' с одинаково направленными внешними нормалями.

Нетрудно понять, что любая сторона многоугольника $S(P)$ параллельна некоторой стороне многоугольника P, и обратно.

Так как многоугольник P' получен из P центральной симметрией относительно точки O, то полусумма Минковского $S(P)$ является центрально-симметричным многоугольником относительно точки O.

Более глубокую связь между свойствами многоугольников P и $S(P)$ устанавливают следующие две леммы.

Лемма 5. *Длины максимальных хорд, параллельных фиксированной прямой, в многоугольниках P и $S(P)$ равны.*

Лемма 6. *Для произвольного выпуклого многоугольника P справедливо равенство $\mu(P) = \mu(S(P))$.*

Замечание 2. *Отметим, что симметризация $S(P)$ выпуклого тела P в многомерном пространстве (естественное обобщение двухмерной конструкции) обладает рядом примечательных свойств, что позволяет рассчитывать на ее успешное применение при исследовании многих экстремальных задач.*

Для выяснения случаев равенства в теореме 1 полезна

Лемма 7. *Если $S(P)$ — параллелограмм, то P также является параллелограммом. Если $S(P)$ — аффинно правильный шестиугольник, то P является усеченным треугольником.*

Замечание 3. *Из доказательства последней леммы следует, что $\mu(P) = 3$ для усеченных треугольников.*

Таким образом, применяя вышеописанную симметризацию для произвольного многоугольника и вышеприведенные леммы, приходим к истинности утверждения теоремы 1.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 01-01-06224, 00-15-96165, 99-01-00543).

Список литературы

1. Tóth L.F. *Über eine affineinvariante Masszahl bei Eipolyedern* // Studia Sci. Math. Hungar. 1970, N5, P.173—180.

2. Cpoft H.T, Falconer K.J., Guy R.K. *Unsolved problems in gemetry*, 1994, Springer-Verlag, P.58.

3. Решетняк Ю.Г. *Одна экстремальная задача из теории выпуклых кривых* // Успехи математических наук. 1953, т.8, N6, C.125—126.

4. Хадвигер Г. *Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии.* — М.: Наука, 1966, 416 с.

Сведения об авторах

Лысенко Наталья Владимировна
Адрес: Россия, 658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6, РИИ АлтГТУ
тел: (38557)3–87–86

Никоноров Юрий Геннадьевич
Адрес: Россия, 658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6, РИИ АлтГТУ
тел: (38557)3–87–86
e-mail: nik@inst.rubtsovsk.ru