

Эллипс, гипербола и парабола в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского

О.С. Ломшакова

Введение

В [1] описаны такие геометрические места точек модели Пуанкаре плоскости Лобачевского как окружность, орициклы, эквидистанты. Цель данной работы — получить уравнения и попытаться выяснить, какие образы соответствуют эллипсу, гиперболе, параболе в этой модели.

Обозначения и необходимые сведения

Интерпретацию геометрии Лобачевского в пространстве Евклида можно построить и притом многими способами. Рассмотрим одну из интерпретаций планиметрии Лобачевского, принадлежащую А. Пуанкаре, связанную с применением инверсии. Следуя [1] дадим определения:

Определение 1. "Плоскостью Лобачевского" (коротко: $\mathcal{L}$ -плоскостью) будем называть верхнюю евклидову полуплоскость, определяемую прямой OX , причем сама прямая OX исключается.

Определение 2. "Точками Лобачевского" (коротко: $\mathcal{L}$ -точками) будем называть евклидовы точки верхней полуплоскости, определяемой прямой OX (точки самой прямой OX исключаются).

Определение 3. "Прямыми Лобачевского" (коротко: $\mathcal{L}$ -прямыми) будем называть евклидовы полуокружности верхней полуплоскости, ортогональные к оси OX , т.е. имеющие центры на этой прямой, а также евклидовы полупрямые, перпендикулярные к прямой OX , с вершинами на этой прямой и расположенные в верхней полуплоскости.

Определение 4. Будем говорить, что "некоторая $\mathcal{L}$ -точка инцидентна с некоторой $\mathcal{L}$ -прямой" или что она "лежит" на этой $\mathcal{L}$ -прямой, если соответствующая евклидова точка в обычном смысле лежит на соответствующей евклидовой полуокружности или полупрямой.

Определение 5. Система из двух точек прямой A и B называется отрезком AB или BA ; точки A и B называются концами отрезка; точки, лежащие между A и B , называются точками отрезка AB или внутренними точками отрезка AB ; все остальные точки прямой AB называются внешними точками к отрезку AB .

Условимся о том, что мы будем понимать под длиной $\mathcal{L}$ -отрезка.

Введем в евклидовой плоскости прямоугольную декартову систему координат, приняв ось OX за ось абсцисс с положительным направлением оси Oy в верхней полуплоскости. Тогда координаты $\mathcal{L}$ -точек $(x; y)$ будут подчинены неравенствам:

$$-\infty < x < +\infty \quad 0 < y < +\infty.$$

Пусть A и B — две $\mathcal{L}$ -точки. Рассмотрим $\rho(A, B) = \ln\left(\frac{r'+r}{r'-r}\right)$, где r — евклидово расстояние между точками A и B , r' — между A и B' , точка B' — точка симметричная точке B относительно OX .

Функция ρ является метрикой в модели Пуанкаре.

Расстояние от точки M до фигуры Φ определяется обычным образом с помощью функции ρ .

Замечание. Инверсия с центром на прямой OX играет в нашей интерпретации такую роль, какую играет движение в геометрии Евклида. Поэтому мы можем называть инверсию указанного вида " $\mathcal{L}$ -движением".

Найдем расстояние от точки до $\mathcal{L}$ -прямой, которая может быть представлена, как было определено выше.

Заметим, что достаточно найти расстояние от $\mathcal{L}$ -точки до $\mathcal{L}$ -прямой заданной евклидовой полупрямой, так как если применить инверсию, то евклидова полупрямая перейдет в евклидову полуокружность. При этом легко получить формулу для нахождения расстояния от $\mathcal{L}$ -прямой, заданной полуокружностью, до точки.

Введем прямоугольную систему координат так, чтобы $\mathcal{L}$ -прямая p являющейся лучом, была задана положительной полуосью оси OY , тогда $x = 0$ — уравнение этой $\mathcal{L}$ -прямой.

Пусть A — данная точка. В этой системе координат: $A(x_0; y_0)$, тогда $A'(x_0; -y_0)$ — точка симметричная A относительно оси OX .

Под расстоянием от точки A до прямой p будем понимать длину $\mathcal{L}$ -отрезка ортогонального прямой p , один конец которого — это точка A , а другой конец — некоторая точка B , принадлежащая $\mathcal{L}$ -прямой p .

Пусть $\mathcal{L}$ -прямая, которой принадлежит этот отрезок задана в прямоугольной системе координат уравнением $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Так как точка A принадлежит этой $\mathcal{L}$ -прямой, то $y_0 = \sqrt{R^2 - x_0^2}$ или $x_0^2 + y_0^2 = R^2$.

Отсюда, точка B имеет координаты $B(0; R)$.

Тогда

$$\rho(B, A) = \ln\left(\frac{r'+r}{r'-r}\right), \text{ где } r' = \sqrt{x_0^2 + (y_0 + R)^2}, r = \sqrt{x_0^2 + (y_0 - R)^2}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \rho(p, A) &= \rho(B, A) = \ln\left(\frac{\sqrt{x_0^2 + (y_0 + R)^2} + \sqrt{x_0^2 + (y_0 - R)^2}}{\sqrt{x_0^2 + (y_0 + R)^2} - \sqrt{x_0^2 + (y_0 - R)^2}}\right) = \\ &= \ln\left(\frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + 2y_0R + R^2} + \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - 2y_0R + R^2}}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + 2y_0R + R^2} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - 2y_0R + R^2}}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{R^2 + 2y_0R + R^2} + \sqrt{R^2 - 2y_0R + R^2}}{\sqrt{R^2 + 2y_0R + R^2} - \sqrt{R^2 - 2y_0R + R^2}}\right) = \\ &= \ln\left(\frac{\sqrt{2R^2 + 2y_0R} + \sqrt{2R^2 - 2y_0R}}{\sqrt{2R^2 + 2y_0R} - \sqrt{2R^2 - 2y_0R}}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{R+y_0} + \sqrt{R-y_0}}{\sqrt{R+y_0} - \sqrt{R-y_0}}\right) = \\ &= \ln\left(\frac{(\sqrt{R+y_0} + \sqrt{R-y_0})^2}{(\sqrt{R+y_0} - \sqrt{R-y_0})(\sqrt{R+y_0} + \sqrt{R-y_0})}\right) = \ln\left(\frac{R+2y_0+R-2y_0+2\sqrt{R-y_0}\sqrt{R+y_0}}{R+2y_0-R+2y_0}\right) = \\ &= \ln\left(\frac{2R+2\sqrt{R^2-y_0^2}}{2y_0}\right) = \ln\left(\frac{R+\sqrt{R^2-y_0^2}}{y_0}\right) = \ln\left(\frac{R+|x_0|}{y_0}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}+|x_0|}{y_0}\right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$\rho(p, A) = \ln\left(\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}+|x_0|}{y_0}\right)$ – расстояние от точки $A(x_0; y_0)$ до $\mathcal{L}$ -прямой p , заданной положительной полуосью оси OY .

Геометрическое место точек плоскости для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек есть величина постоянная, или "эллипс".

Пусть $F_1(x_1; y_1)$ и $F_2(x_2; y_2)$ – данные точки, $M(x; y)$ – произвольная точка г.м.т.

Характеристическое свойство: $\rho(F_1, M) + \rho(F_2, M) = const.$

Так как $\rho(F_1, M) = \ln\left(\frac{r'+r}{r'-r}\right)$ и $\rho(F_2, M) = \ln\left(\frac{n'+n}{n'-n}\right)$.

где $r = F_1M, r' = F_1M', n = F_2M, n' = F_2M'$.

$$r = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}; r' = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y+y_1)^2};$$

$$n = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}; n' = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y+y_2)^2},$$

то характеристическое свойство запишется:

$$\ln\left(\frac{r'+r}{r'-r}\right) + \ln\left(\frac{n'+n}{n'-n}\right) = \ln C \Leftrightarrow \frac{r'+r}{r'-r} \cdot \frac{n'+n}{n'-n} = C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (r'+r)(n'+n) = C(r'-r)(n'-n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r'n' + r'n + rn' + rn = Cr'n' - Cr'n - Crn' + Crn \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r'n' + r'n + rn' + rn - (Cr'n' - Cr'n - Crn' + Crn) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r'n' + r'n + rn' + rn - Cr'n' + Cr'n + Crn' - Crn = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-C)r'n' + (1+C)r'n + (1+C)rn' + (1-C)rn = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-C)(r'n' + rn) + (1+C)(r'n + rn') = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (C+1)(r'n + rn') = (C-1)(r'n' + rn) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (C+1)(\sqrt{((x-x_1)^2 + (y+y_1)^2)((x-x_2)^2 + (y-y_2)^2)} + \\ &\quad + \sqrt{((x-x_1)^2 + (y-y_1)^2)((x-x_2)^2 + (y+y_2)^2)}) = \\ &= (C-1)(\sqrt{((x-x_1)^2 + (y+y_1)^2)((x-x_2)^2 + (y+y_2)^2)} + \\ &\quad + \sqrt{((x-x_1)^2 + (y-y_1)^2)((x-x_2)^2 + (y-y_2)^2)}). \end{aligned}$$

Полученное уравнение является уравнением "эллипса".

Геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых абсолютная величина разности расстояний до двух данных точек есть величина постоянная, или "гипербола".

Пусть $F_1(x_1; y_1)$ и $F_2(x_2; y_2)$ – данные точки, $M(x; y)$ – произвольная точка г.м.т.

Характеристическое свойство: $|\rho(F_1, M) - \rho(F_2, M)| = C, \quad \forall C > 0.$

Так как $\rho(F_1, M) = \ln\left(\frac{r'+r}{r'-r}\right)$ и $\rho(F_2, M) = \ln\left(\frac{n'+n}{n'-n}\right)$.

где $r = F_1M, r' = F_1M', n = F_2M, n' = F_2M'$,

$$r = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}; r' = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y+y_1)^2};$$

$$n = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}; n' = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y+y_2)^2},$$

то характеристическое свойство запишется:

$$|\ln\left(\frac{r'+r}{r'-r}\right) - \ln\left(\frac{n'+n}{n'-n}\right)| = C \Leftrightarrow \ln\left(\frac{r'+r}{r'-r} \cdot \frac{n'-n}{n'+n}\right) = \pm C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{r'+r}{r'-r} \cdot \frac{n'-n}{n'+n} = e^{\pm C} = C_1 \quad C_1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (r' + r)(n' - n) = C_1(r' - r)(n' + n) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow r'n' - r'n + rn' - rn = C_1(r'n' + r'n - rn' - rn) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (1 - C_1)r'n' - (C_1 + 1)r'n + (C_1 + 1)rn' - (1 - C_1)rn = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (C_1 + 1)(rn' - r'n) + (1 - C_1)(r'n' - rn) = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (C_1 + 1)(rn' - r'n) = (C_1 - 1)(r'n' - rn) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (C_1 + 1)(\sqrt{((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2)((x - x_2)^2 + (y + y_2)^2)} - \\
&\quad - \sqrt{((x - x_1)^2 + (y + y_1)^2)((x - x_2)^2 + (y - y_2)^2)}) = \\
&= (C_1 - 1)(\sqrt{((x - x_1)^2 + (y + y_1)^2)((x - x_2)^2 + (y + y_2)^2)} - \\
&\quad - \sqrt{((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2)((x - x_2)^2 + (y - y_2)^2)}).
\end{aligned}$$

Полученное уравнение является уравнением "гиперболы".

Геометрическое место точек плоскости для каждой из которых расстояние до данной точки равно расстоянию до данной прямой, или "парабола".

Рассмотрим случай, когда директриса совпадает с Λ -прямой: $y > 0$, $x = 0$.

Пусть $M(x; y)$ - произвольная точка г.м.т., $A(a; b)$ - фокус и $y > 0$, $x = 0$ - директриса.

Характеристическое свойство: $\rho(M, d) = \rho(M, A)$.

$$\begin{aligned}
\rho(M, d) &= \ln\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + |x|}{y}\right), \\
\rho(M, A) &= \ln\left(\frac{r' + r}{r' - r}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{(x-a)^2 + (y+b)^2} + \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}{\sqrt{(x-a)^2 + (y+b)^2} - \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}\right), \\
\ln\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + |x|}{y}\right) &= \ln\left(\frac{\sqrt{(x-a)^2 + (y+b)^2} + \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}{\sqrt{(x-a)^2 + (y+b)^2} - \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}\right), \\
\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + |x|}{y} &= \frac{\sqrt{(x-a)^2 + (y+b)^2} + \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}{\sqrt{(x-a)^2 + (y+b)^2} - \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}.
\end{aligned}$$

Полученное уравнение является уравнением "параболы".

Список литературы

1. Тройнин А.Л. *Основания геометрии*. Пособие для пед.институтов. Под ред. Сорокина Ю.И., М., Учпедиз., 1961.

Сведения об авторе

Ломшакова Оксана Сергеевна

Адрес: Россия, 656015, Барнаул, пр. Социалистический, 126, БГПУ, магистратура

тел: (3852)36-54-36