

Инвариантные эйнштейновы метрики на 3-локально симметрическом пространстве ортогональной группы

А.М. Ломшаков

Введение

Рассмотрим G/H — однородное компактное пространство, G — полупростая группа движений G/H . Пусть $[\cdot, \cdot]$ — скобка Ли, $B(\cdot, \cdot)$ — форма Киллинга алгебры Ли g , $\langle \cdot, \cdot \rangle = -B(\cdot, \cdot)$ — бинвариантная риманова метрика группы G .

Пусть p — ортогональное дополнение к h в g относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Любая G — однородная риманова метрика на G/H порождает некоторое ad_h -инвариантное скалярное произведение на p и наоборот [2, формула 7.24]. Отождествим однородные римановы метрики на G/H с ad_h -инвариантными скалярными произведениями на p .

Допустим, что пространство G/H таково, что модуль p представим в виде прямой суммы трех попарно ортогональных относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ad_h -инвариантных неизоморфных и неприводимых модулей, т.е.

$$p = p_1 \oplus p_2 \oplus p_3, \quad p_i \not\cong p_j, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}$$

удовлетворяющих соотношениям $[p_i, p_i] \subset h$ для $i \in \{1, 2, 3\}$.

В [1] доказано, что все пространства G/H , удовлетворяющие вышеприведенным условиям, допускают однородную метрику Эйнштейна. Пространство $SO(a+b+c)/SO(a) \times SO(b) \times SO(c)$ является именно таким пространством, допускающим однородную эйнштейнову метрику.

Обозначения и необходимые сведения

Пусть $\{e_i^j\}$ — ортонормированный базис в p_i относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $i \in \{1, 2, 3\}$, $1 \leq j \leq d_i = \dim p_i$. Следуя [1], определим выражение $\begin{bmatrix} k \\ ij \end{bmatrix}$ для $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{bmatrix} k \\ ij \end{bmatrix} = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} (\langle [e_i^\alpha, e_j^\beta], e_k^\gamma \rangle)^2,$$

где α, β, γ изменяются в пределах от 1 до d_i, d_j, d_k соответственно. Символы $\begin{bmatrix} k \\ ij \end{bmatrix}$ симметричны по всем трем индексам в силу бинвариантности метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Причем для пространств рассматриваемого нами типа $\begin{bmatrix} k \\ ij \end{bmatrix} = 0$ при двух совпадающих индексах. Величину $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix}$ называют символом Казимира. Очевидно, что

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 32 \end{bmatrix} \geq 0.$$

Рассмотрим семейство ad_h -инвариантных метрик на p . Согласно лемме Шура оно имеет вид:

$$(\cdot, \cdot) = x_1 \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle|_{p_1} + x_2 \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle|_{p_2} + x_3 \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle|_{p_3},$$

где $x_i > 0$. Пусть $Ric(\cdot, \cdot)$ — форма кривизны Риччи метрики $(\cdot, \cdot)$, которая также ad_h -инвариантна, тогда

$$Ric(\cdot, \cdot)|_{p_i} = r_i \cdot (\cdot, \cdot)|_{p_i}$$

для некоторых вещественных r_i . В [1] выводятся формулы для величин r_i .

В данной работе доказана

Теорема 1. Пространство $SO(a+b+c)/SO(a) \times SO(b) \times SO(c)$ при условии $a \neq b$, $b \neq c$, $a \neq c$ допускает либо две, либо четыре инвариантные метрики Эйнштейна.

Доказательство. В следствии того, что метрика однородного риманова пространства определяется с точностью до гомотетии, можно рассмотреть новую метрику

$$(\cdot, \cdot)_n = \frac{1}{x_1} \cdot (\cdot, \cdot) = 1 \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle|_{p_1} + \frac{x_2}{x_1} \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle|_{p_2} + \frac{x_3}{x_1} \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle|_{p_3}$$

Пусть $t = \frac{x_2}{x_1}$, $s = \frac{x_3}{x_1}$. Тогда метрика примет вид:

$$(\cdot, \cdot)_n = 1 \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle|_{p_1} + t \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle|_{p_2} + s \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle|_{p_3}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $d_1 \leq d_2 \leq d_3$. Пусть $\alpha_i = \frac{d_i}{A}$. Тогда согласно [1] имеем $2 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$.

При этом формулы для главных значений кривизны Риччи r_i^* примут вид:

$$\begin{cases} r_1^* = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha_1} \left(\frac{1}{ts} - \frac{t}{s} - \frac{s}{t} \right), \\ r_2^* = \frac{1}{2t} + \frac{1}{2\alpha_2} \left(\frac{t}{s} - \frac{1}{ts} - \frac{s}{t} \right), \\ r_3^* = \frac{1}{2s} + \frac{1}{2\alpha_3} \left(\frac{s}{t} - \frac{1}{ts} - \frac{t}{s} \right). \end{cases} \quad (1)$$

При условии, что $r_1^* = r_2^* = r_3^*$ метрика будет эйнштейнова. Тогда эти равенства можно записать, предварительно упростив, в виде системы

$$\begin{cases} -\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}\right)t^2 + \left(\frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_1}\right)s^2 + ts - s + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} = 0, \\ \left(\frac{1}{\alpha_3} - \frac{1}{\alpha_1}\right)t^2 - \left(\frac{1}{\alpha_3} + \frac{1}{\alpha_1}\right)s^2 + ts - t + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_3} = 0, \\ \left(\frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3}\right)t^2 - \left(\frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_3}\right)s^2 + s - t + \frac{1}{\alpha_3} - \frac{1}{\alpha_2} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Легко заметить, что одно из трех уравнений является следствием двух других. Поэтому можно рассматривать систему из любых двух уравнений. Например, из двух последних:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{\alpha_3} - \frac{1}{\alpha_1}\right)t^2 - \left(\frac{1}{\alpha_3} + \frac{1}{\alpha_1}\right)s^2 + ts - t + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_3} = 0, \\ \left(\frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3}\right)t^2 - \left(\frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_3}\right)s^2 + s - t + \frac{1}{\alpha_3} - \frac{1}{\alpha_2} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Рассмотрим $SO(a+b+c)/SO(a) \times SO(b) \times SO(c) - 3$ -локально симметрическое пространство ортогональной группы.

Пусть $G = SO(a+b+c)$, g — алгебра Ли группы G , $H = SO(a) \times SO(b) \times SO(c)$ — подгруппа G , h — алгебра Ли H , $so(a)$, $so(b)$, $so(c)$ — алгебры Ли групп $SO(a)$, $SO(b)$, $SO(c)$ соответственно, отсюда $h = so(a) \oplus so(b) \oplus so(c)$. Тогда алгебра Ли $g = p \oplus h = p_1 \oplus p_2 \oplus p_3 \oplus h$, а алгебра изотропии h состоит из матриц вида:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} A & O & O \\ \hline O & B & O \\ \hline O & O & C \end{array} \right)$$

где A, B, C — это блочные кососимметричные матрицы размеров соответственно $a \times a$, $b \times b$, $c \times c$, O — нулевые блоки.

Модули p_1, p_2, p_3 представляют собой матрицы вида

$$\left(\begin{array}{c|c|c} O & C & O \\ \hline D & O & O \\ \hline O & O & O \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{c|c|c} O & O & E \\ \hline O & O & O \\ \hline F & O & O \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{c|c|c} O & O & O \\ \hline O & O & G \\ \hline O & H & O \end{array} \right),$$

где C, E, G — блочные матрицы размеров соответственно $a \times b$, $a \times c$, $b \times c$ и $C = -D^t$, $E = -F^t$, $G = -H^t$.

Заметим, что $\dim h = \frac{a(a-1)}{2} + \frac{b(b-1)}{2} + \frac{c(c-1)}{2} = \frac{a^2+b^2+c^2-(a+b+c)}{2}$, $\dim p_1 = ab$, $\dim p_2 = ac$, $\dim p_3 = bc$.

Тогда

$$\dim g = \dim p_1 + \dim p_2 + \dim p_3 + \dim h = ab + ac + bc + \frac{a^2+b^2+c^2-(a+b+c)}{2} = \frac{(a+b+c)^2-(a+b+c-1)}{2} = \frac{(a+b+c)(a+b+c-1)}{2}.$$

Нетрудно видеть, что $[p_i, p_i] \subset h$, $[h, p_i] \subset p_i$, $[p_i, p_j] \subset p_k$ при различных $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$.

Рассмотрим скалярное произведение $(X, Y)_0 = \frac{1}{2} \text{tr} XY^t$. Введем базис в p_1, p_2, p_3, h , который будет ортонормирован относительно введенного скалярного произведения.

Обозначим за Δ_{ij}^{sn} блок матрицы, он имеет размеры $s \times n$, где на пересечении i -ой строки и j -ого столбца стоит 1, а на остальных местах нули. Умножение таких блоков определяется следующим образом:

$$\Delta_{ij}^{sn} \Delta_{kl}^{ns} = \begin{cases} \Delta_{il}^{ss}, & \text{при } j = k \\ O, & \text{при } j \neq k \end{cases}$$

Рассмотрим базис в g , состоящий из элементов $\{X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij}, H_{ij}^{aa}, H_{ij}^{bb}, H_{ij}^{cc}\}$.

$$X_{ij} = \left(\begin{array}{c|c|c} O & \Delta_{ij}^{ab} & O \\ \hline -\Delta_{ji}^{ba} & O & O \\ \hline O & O & O \end{array} \right) \in p_1, \quad Y_{ij} = \left(\begin{array}{c|c|c} O & O & \Delta_{ij}^{ac} \\ \hline O & O & O \\ \hline -\Delta_{ji}^{ca} & O & O \end{array} \right) \in p_2,$$

$$Z_{ij} = \left(\begin{array}{c|c|c} O & O & O \\ \hline O & O & \Delta_{ij}^{bc} \\ \hline O & -\Delta_{ji}^{cb} & O \end{array} \right) \in p_3, \quad H_{ij}^{aa} = \left(\begin{array}{c|c|c} \Delta_{ij}^{aa} - \Delta_{ji}^{aa} & O & O \\ \hline O & O & O \\ \hline O & O & O \end{array} \right) \in h,$$

$$H_{ij}^{bb} = \left(\begin{array}{c|c|c} O & O & O \\ \hline O & \Delta_{ij}^{bb} - \Delta_{ji}^{bb} & O \\ \hline O & O & O \end{array} \right) \in h, \quad H_{ij}^{cc} = \left(\begin{array}{c|c|c} O & O & O \\ \hline O & O & O \\ \hline O & O & \Delta_{ij}^{cc} - \Delta_{ji}^{cc} \end{array} \right) \in h,$$

где $i \neq j$, а для последних трех элементов $i < j$.

Он ортонормирован относительно скалярного произведения $(\cdot, \cdot)_0$.

Далее, найдем коэффициент пропорциональности из равенства $\langle X, Y \rangle = \lambda \cdot (X, Y)_0$,

где $\langle X, Y \rangle = -B(X, Y) = -\text{tr} adX \circ adY$, $(X, Y)_0 = \frac{1}{2} \text{tr} XY^t$.

При $X = Y$ имеем $\langle X, X \rangle = \lambda \cdot (X, X)_0$, и $(X, X)_0 = 1$.

Отсюда получаем: $\lambda = \langle X, X \rangle = -\text{tr}(adX)^2$.

Прямые матричные вычисления показывают, что $\lambda = 2a + 2b + 2c - 4$.

Находим константу Казимира.

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \sum (([X_{ij}, Y_{rl}], Z_{mn})_0)^2$$

Так как

$$\begin{aligned} [X_{ij}, Y_{rl}] &= 0 \cdot Y_{kl} & \text{при } i \neq k, \\ [X_{ij}, Y_{rl}] &= -Z_{jl} & \text{при } i = k, \text{ то} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \sum ((-Z_{jl}, Z_{mn})_0)^2 = \frac{1}{\lambda} \sum_{j,l,m,n} a((Z_{jl}, Z_{mn})_0)^2 = \\ &= \frac{a}{\lambda} \sum_{j,l,m,n} ((Z_{jl}, Z_{mn})_0)^2 = \frac{abc}{\lambda} = \frac{abc}{2a + 2b + 2c - 4} \end{aligned}$$

Находим $\lambda_i = \frac{d_i}{A}$, для которых $2 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$.

В нашем случае, $d_1 = \dim p_1 = ab$, $d_2 = \dim p_2 = ac$, $d_3 = \dim p_3 = bc$ и $d_1 \leq d_2 \leq d_3$, поэтому

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{d_1}{A} = \frac{2(a+b+c-2)}{c} \\ \lambda_2 &= \frac{d_2}{A} = \frac{2(a+b+c-2)}{b} \\ \lambda_3 &= \frac{d_3}{A} = \frac{2(a+b+c-2)}{a}. \end{aligned}$$

Подставляем в систему (3), после преобразований получим систему:

$$\begin{cases} (a-c)t^2 - (a+c)s^2 + 2(a+b+c-2)ts - 2(a+b+c-2)t + a+c = 0, \\ (a+b)t^2 - (a+b)s^2 + 2(a+b+c-2)s - 2(a+b+c-2)t + a-b = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Систему (4) можно свести к уравнению четвертой степени либо относительно s , либо относительно t .

Легко заметить, что оба этих уравнения получаются друг из друга заменой t на s , a на b и b на a , поэтому не имеет значения какое из этих уравнений следует рассматривать.

Рассмотрим уравнение относительно t .

$$\begin{aligned} &-(a+b-2)(a+b)^2(a+b+2c-2)t^4 + 2(a+b)(2a^2+3ac+3ab-6a+3bc+4-4b+b^2-4c)(a+b+c-2)t^3 - \\ &2(-16a+28a^2-16a^3+3a^4-8b+36ab-34a^2b+9a^3b+8b^2-20ab^2+9a^2b^2-2b^3+3ab^3-8c+36ac-34a^2c+9a^3c+28bc-52abc+22a^2bc-18b^2c+16ab^2c+3b^3c+8c^2-20ac^2+9a^2c^2-18bc^2+16abc^2+7b^2c^2-2c^3+3ac^3+3bc^3)t^2 + \\ &2(a+c)(a+b+c-2)(2a^2+3ab-6a+3ac+3bc+4-4b-4c+c^2)t - (a+c-2)(a+c)^2(a+2b+c-2) = 0. \end{aligned}$$

Нас интересуют положительные корни этого уравнения. Трудно решить это уравнение, но можно ответить на вопрос о числе положительных корней. Согласно теореме Декарта, число положительных корней совпадает с числом перемены знаков коэффициентов при t [3]. Оценим каждый из коэффициентов уравнения.

Легко заметить, что коэффициент при t^4 получается из свободного члена, а коэффициент при t^3 из коэффициента при t заменой b на c в обе стороны. Коэффициент при t^2 является симметрическим многочленом относительно b и c . В силу равноправности a, b, c можно определить знаки только при коэффициентах при t^4, t^3, t^2 .

Полученное чередование знаков $-, +, -, +, -$.

Таким образом, так как существует одно положительное решение [1], то положительных корней либо два, либо четыре согласно теореме Декарта.

В частном случае, когда $a = n, b = n + 1, c = n + 2, n \in N$, уравнение четвертой степени примет вид:

$$-(4n+3)(2n-1)(1+2n)^2t^4 + 2(2n+1)(3n+1)(12n^2+6n-1)t^3 + (-360n^3-200n^2-224n^4-8-56n)t^2 + 8(3n+1)(n+1)(6n^2+4n+1)t - 16n-64n^2-80n^3-32n^4=0,$$

а система примет вид:

$$\begin{cases} t^2 + (n+1)s^2 - (3n+1)ts + (3n+1)t - (n+1) = 0, \\ (2n+1)t^2 - (2n+1)s^2 + 2(3n+1)s - 2(3n+1)t - 1 = 0. \end{cases}$$

Первое и второе уравнения системы - уравнения гипербол в прямоугольной декартовой системе координат Ots .

При $n = 1, 2, 3, 4$ эти гиперболы пересекаются в двух точках (рис.1, при $n = 1$), а начиная с $n = 5$ в четырех точках (рис.2, при $n = 6$), причем точки пересечения располагаются в первом квадранте и никакие две из них не принадлежат прямой, проходящей через начало координат, что говорит о том, что метрики, соответствующие решениям системы, не пропорциональны.

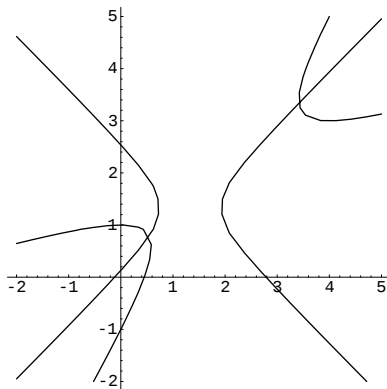


Рис. 1: при $n=1$

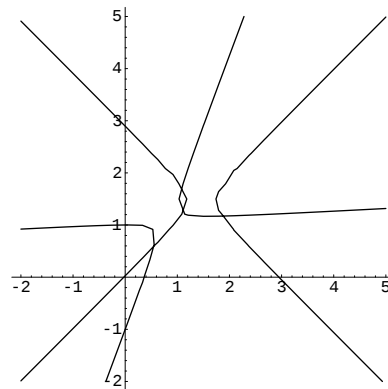


Рис. 2: при $n=6$

Данный факт установлен графически с использованием пакетов прикладных программ: Maple V Release 5, Mathematica 4, Serpik Graphs.

Если рассмотреть случай, когда $n \rightarrow \infty$, то мы получим уравнения так называемых "предельных гипербол", которые вырождаются в "предельные пары пересекающихся прямых" и систему из их уравнений

$$\begin{cases} s^2 - 3ts + 3t - 1 = 0, \\ t^2 - s^2 + 3s - 3t = 0. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (s-1)(-3t+s+1) = 0, \\ (t-s)(t+s-3) = 0. \end{cases}$$

Они пересекаются в четырех "предельных" точках $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (1, 1), (1, 2), (2, 1)$, которые лежат в первом квадранте.

Таким образом, теорема доказана. $\square$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00543)

Список литературы

1. Никоноров Ю.Г. Об одном классе однородных компактных многообразий Эйнштейна // Сиб. мат. журн., 2000, том 41, № 1, С. 200 - 205.
2. Бессе А.Л. Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990.
3. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики: Учебное пособие для вузов. - 3-е изд., испр. - М.: Наука, 1966. - 664 с.

Сведения об авторе

Ломшаков Александр Михайлович

Адрес: Россия, 656015, Барнаул, пр. Социалистический, 126, БГПУ

тел: (3852)36—54—36

e-mail: lomshakov@asu-dsn.math.su