ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИИ ЛАМБЕРТА W В РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Сергеев С.А., Спиридонов Ф.Ф.
Бийский технологический институт, г. Бийск

Аннотация

В работе дано определение функции Ламберта W. Рассмотрены некоторые ее свойства (дифференцирование и интегрирование). Описано решение задачи кристаллизации с внутренней боковой поверхности неограниченного полого цилиндра с использованием функции Ламберта W.

Введение

Математические функции должны помогать облегчить численные и алгебраические вычисления. Поэтому к любой новой функции предъявляются определенные требования до того как ее применить при решении той или иной задачи. Для этого она должна удовлетворять нескольким свойствам. Первое свойство, которое функция должна иметь – это применимость в различных областях математической науки, т.е. быть полезной при решении разных задач. Существует много специальных функций, большинство из которых широко не используются, но мы хотим знать о функциях, которые будут пригодны для наших вычислений. Каждый для себя проводит линию между пригодностью и непригодностью по-разному. Второе свойство функций – это удобство для численных вычислений. И, конечно же, она должна обладать алгебраическими свойствами. Функция, которая не проста в использовании, не применяется часто. До прихода научных калькуляторов даже тригонометрические и логарифмические функции были сложны для вычислений.

В настоящее время в преподавании научных дисциплин широко используются специализированные математические продукты – Maple, Matlab, Mathematica и др. В процессе решения той или иной задачи с помощью таких программ нередко можно встретить новые специальные функции. Одной из таких функций является функция W, которая обозначается в среде символьных расчетов Maple как LambertW.

Функция Ламберта W - это функция, которая отвечает всем критериям, которые были только что перечисленны. Свое имя впервые она получила в начале 80-х годов XX века, когда в программе Maple была описана функция, которая называлась просто W. Данная функция была названа в честь И. Г. Ламберта, который еще в XVIII веке предсказал определение этой функции, хотя и не дал ее формулировку [1].

Функция Ламберта W - это функция, которая удовлетворяет следующему уравнению

$$We^{W} = z\,, \qquad (1)$$

где z – комплексное число. Это уравнение всегда имеет бесконечное число решений, большинство из которых комплексные, так что W – многозначная функция. Разные возможные решения обозначаются целым числом, называемым ветвью. В этом случае решение записывают как $W_k(z)$, где k = ±0, ±1, ±2 и т.д. Обычно данную функцию применяют, когда решение будет выражено действительным числом. Таким образом, когда z действительное число, уравнение (1) может иметь два действительных решения, в этом случае они обозначаются как $W_0(z)$ и $W_{-1}(z)$, или может иметь только одно действительное решение $W_0(z)$ [$W_{-1}(z)$ будет комплексным], или вообще быть без действительного решения. Можно заметить, что даже если z действительное число, ветви отличные от k = 0, -1 всегда комплексные. В настоящее время функция Ламберта W известна не только компьютерной программе Maple, но и программе Mathematica (в случае с Mathematica, эта функция обозначена как ProductLog [2]). Использование функции W в решениях задач, где ее возможно применить, позволяет легко получить численные значения, графики, производные и интегралы.

Функция Ламберта W нашла большое поле применения от физики и вычислительной техники до статистики и биологии, например, вычисление распределений в теории чисел, высоты волн в океанографии, перебор деревьев в комбинаторике, движение воды в соли, релятивистская теория гравитации и статистические распределения. Есть много различных областей науки, где эта функция успешно применяется, и где она помогает разъяснить многие физические аспекты. Функцию Ламберта W можно использовать не только в физике, но также и в других областях.

Некоторые свойства W

Прежде чем продолжить дальнейшее вводное описание свойств функции, очевидно, нужно начать с графика ее действительных корней. Две действительные ветви показаны на графике, основная ветвь $W_0(x)$ обозначена сплошной линией, а ветвь $W_{-1}(x)$ обозначена точками.

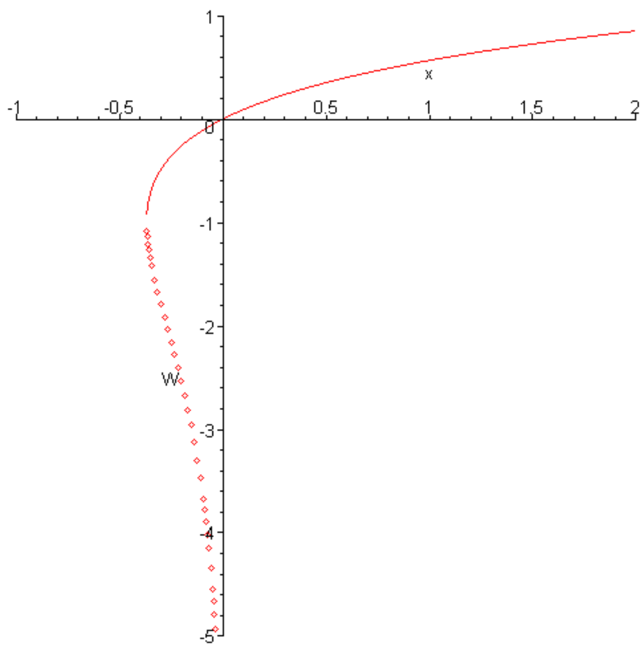

График – Действительные значения функции Ламберта W.

W может быть продифференцирована:

$$W'=e^{-W}/(1+W), \tag{2}$$

Также возможно интегрировать функции, содержащие в себе W:

$$\int W(x)dx = \left(W^2(x) - W(x) + 1\right)e^{W(x)} + C\,, \tag{3}$$

$$\int xW(x)dx = \frac{1}{8}\left(2W(x)-1\right)\left(2W^2(x)+1\right)e^{2W(x)} + C\,. \tag{4}$$

Другие алгебраические свойства найдутся в работе [3], но мы приведем еще одно, которое должно пригодится в физических приложениях: асимптотическая формула для больших (комплексных) чисел z.

$$W_k(z) \sim \ln z + 2\pi ik - \ln(\ln z + 2\pi ik)\,. \tag{5}$$

Кристаллизация с внутренней боковой поверхности неограниченного полого цилиндра

Рассмотрим применение функции Ламберта W на примере решения хорошо известной задачи из теории теплопроводности [4, 5].

Дан неограниченная полый цилиндр, содержащий расплав при температуре T_c. В начальный момент времени на внутренней боковой поверхности цилиндра устанавливается температура окружающей среды T_0, которая будет постоянной во время протекания кристаллизации. Начиная с внутренней боковой поверхности цилиндра радиуса R_1, образуется кристаллический слой. На подвижной границе происходит переход из одного агрегатного состояния в другое. Распределение температуры в кристаллическом слое происходит в стационарном режиме.

Уравнение теплопроводности для неограниченного цилиндра имеет вид

$$\frac{a}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=0 \ \ (\tau > 0;\ R_1 < \mathrm{r} < \xi). \tag{6}$$

Это уравнение решается при следующих граничных условиях:

$$T(r,0) = T_{\text{c}};\ T(R_1,\tau) = T_0;\ T(\xi,\tau) = T_{\text{c}}. \tag{7}$$

На границе раздела фаз выполняется условие [6]

$$q\rho\frac{d\xi}{d\tau}+\rho c\left(T_c-T_0\right)\frac{d\xi}{d\tau}=\lambda\left(\frac{dT(r)}{dr}\right)_{r=\xi}. \tag{8}$$

Решение уравнения (6) с учетом граничных условий (7) примет вид

$$T(r)=-\frac{\left(T_c-T_0\right)ln(r)+T_0\,ln(\xi)-T_c\,ln\left(R_1\right)}{ln\left(\dfrac{R_1}{\xi}\right)}. \tag{9}$$

Подставим решение (9) в граничное условие (8). Получим

$$\left[q+c\left(T_c-T_0\right)\right]\frac{d\xi}{d\tau}=\frac{ac\left(T_c - T_0\right)}{\xi\,ln\left(\dfrac{R_1}{\xi}\right)}. \tag{10}$$

Разделим переменные в уравнении (10) и проинтегрируем. Выразим время кристаллизации для неограниченного полого цилиндра в виде

$$\tau=\frac{q+c\left(T_c-T_0\right)}{4ac\left(T_c-T_0\right)}\left(R_1^2-\xi^2\,ln\left(\frac{R_1^2}{\xi^2}\right)-\xi^2\right). \tag{11}$$

Выразим толщину кристаллического слоя из решения (11), удовлетворяющего условию задачи

$$\xi=\sqrt{\frac{\beta\tau-R_1^2}{W\left(\dfrac{\beta\tau-R_1^2}{eR_1^2}\right)}}, \tag{12}$$

где $\beta=\dfrac{4ac\left(T_c-T_0\right)}{q+c\left(T_c-T_0\right)}$.

Таким образом, уравнение (12) является законом движения границы фазового перехода для полого неограниченного цилиндра.

В данном уравнении мы встречаем функцию Ламберта W. Следует обратить внимание, что при решении данного уравнения мы будем иметь случай, когда выражение будет иметь два действительных корня (при k = 0 и k = -1). Условию же поставленной задачи будет удовлетворять только случай с k = 0, при котором функция Ламберта W обозначается $W_0(z)$ или как принято просто W(z).

Заключение

В работе рассмотрена функция Ламберта W и применение ее к решению задачи теплопроводности. Описаны примеры дифференцирования и интегрирование функции. Получен алгоритм решения задачи кристаллизации с внутренней боковой поверхности неограниченного полого цилиндра с использованием функции Ламберта W.

Список литературы

1. Valluri S.R., Jeffrey D.J., Corless R.M. Some applications of the Lambert W function to physics. // Canadian J. Physics, 2000. Vol 78, p. 823-831.
2. Eric W. Weisstein. The CRC Concise Encyclopedia of Mathematics. – Boca Raton: CRC Press LLC, 1998. – P. 1969.
3. Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E., Jeffrey D.J., Knuth D.E. On the Lambert W function. // Advances Computational Maths. 1996. Vol. 5, p. 329–359.
4. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 599 с.
5. Любов Б. Я. Теория кристаллизации в больших объемах. – М.: Наука, 1975. – 256 с., ил.
6. Гельперин Н.И., Носов Г.А. Основы техники кристаллизации расплавов. – М.: Химия, 1975. – 352 с.