

О существовании поверхности ко размерности два в E^n с данным грассмановым образом

К.О. Кизбикенов

Пусть F — регулярная поверхность в E^n размерности $n-2$ такая, что существует гиперплоскость E^{n-1} в E^n проекция F' поверхности F в эту гиперплоскость является поверхностью со взаимнооднозначным сферическим изображением в E^{n-1} . Пусть z^i ($i = 1 \dots n$) прямоугольные координаты в E^n , причем гиперплоскость E^{n-1} задается уравнением $z^n = 0$. В гиперплоскости рассмотрим единичную сферу S размерности $n-2$, с центром в начале координат O . На открытой полусфере S_+ сферы S введем нормальные координаты $x^1, \dots, x^{n-2}$ [3] (с помощью проектирования из центра сферы на касательную плоскость к S). Пусть ζ произвольный единичный вектор с началом в точке O , конец которого принадлежит S_+ . Тогда

$$\zeta = \{x^1/a, \dots, x^{n-2}/a, 1/a, 0\}, \quad (1)$$

где $a = \sqrt{1 + (x^1)^2 + \dots + (x^{n-2})^2}$.

Поверхность F' зададим с помощью опорной функции $h(x)$, где

$$x = (x^1, \dots, x^{n-2}).$$

Поверхность F' задается следующим образом:

$$\begin{aligned} z^1 &= h_1 \\ &\dots \\ z^{n-2} &= h_{n-2} \\ z^{n-1} &= h - x^i h_i, \quad i = 1, \dots, n-2, \end{aligned} \quad (2)$$

где h_i , обозначают частные производные функции $h(x)$ по переменной x^i .

С помощью функций $\alpha_1(x), \dots, \alpha_{n-2}(x)$ построим единичный вектор $\eta(x)$, ортогональный $\zeta(x)$.

$$\begin{aligned} \eta(x) = \frac{1}{b} \{ &\alpha_2 x^2 x^1 + \dots + \alpha_{n-2} x^{n-2} x^1 - \\ &- \alpha_1 (1 + (x^2)^2 + \dots + (x^{n-2})^2), \dots, \\ &\alpha_1 x^1 x^{n-2} + \dots + \alpha_{n-3} x^{n-3} x^{n-2}, \alpha_1 x^1 + \\ &+ \dots + \alpha_{n-2} x^{n-2}, a^2 \}, \end{aligned} \quad (3)$$

где b — соответствующий нормирующий множитель. Пара векторов ζ и η , определяют произвольную 2 — плоскость в E^n (кроме тех, которые параллельны гиперплоскости E^{n-1}), то есть для любой 2 — плоскости не параллельной E^{n-1} можно подобрать числа x^i и α_j , что векторы ζ и η будут параллельны этой плоскости. Пусть векторы ζ и η будут векторами нормали для некоторой $(n-2)$ — мерной поверхности F . Бивектор $\sigma = \zeta \wedge \eta$ задает отображение F в G_2^n — граcсманово многообразие двумерных плоскостей в E^n в виде $n-2$ — мерного подмногообразия Γ , которое называется обобщенным гауссовым отображением. Таким образом каждой поверхности F соответствует некоторое подмногообразие $\Gamma \subset G_2^n$. Возникает вопрос для каких подмногообразий $\Gamma \subset G_2^n$ существует поверхность $F \subset E^n$, что Γ есть образ F при обобщенном гауссовом отображении.

Рассмотрим отображение некоторой области U пространства E^{n-2} в некоторую область того же пространства, заданное следующим образом: точке $X(x^1, \dots, x^{n-2})$ поставим в соответствие точку $Y(\alpha_1(x), \dots, \alpha_{n-2}(x))$. Пусть матрица A есть якобиан этого отображения, то есть

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_1(x)}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \alpha_1(x)}{\partial x^{n-2}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \alpha_{n-2}(x)}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \alpha_{n-2}(x)}{\partial x^{n-2}} \end{bmatrix}.$$

Пусть $B = A^T$ матрица транспонированная к A .

Теорема. Пусть функции $\alpha_1(x), \dots, \alpha_{n-2}(x)$ класса C^2 и такие, что вектор $B \cdot \nabla f(x)$ является градиентом некоторой функции (∇f — градиент функции f в евклидовых координатах). Другими словами, существует некоторая функция $f(x)$ такая, что $\text{rot}(B \cdot \nabla f(x)) = 0$ (rot — ротор векторного поля). Тогда существует $n - 2$ -мерная поверхность F , грассманов образ которой задается с помощью функций $\alpha_i(x)$, где $i = 1, \dots, n - 2$. Поверхность F будет регулярной в тех точках, в которых гессиан функции $f(x)$ является невырожденной матрицей.

Доказательство. Поверхность F' , заданная уравнениями (2), является проекцией поверхности F . Поэтому векторное уравнение поверхности F будет иметь вид

$$r(x) = \{h_1, \dots, h_{n-2}, h - x^i h_i, z\}, \quad (4)$$

где z неизвестная функция от $x^1, \dots, x^{n-2}$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что индексы i, j меняются от 1 до $n - 2$. Мы предположили, что векторы ζ и η являются векторами нормали поверхности F' . Для этого необходимо, чтобы выполнялись следующие условия: скалярные произведения $(r_i \cdot n)$ и $(r_i \cdot \eta)$ должны равняться нулю. Первые из этих уравнений выполняются тождественно, вторые же приводят к системе линейных уравнений относительно неизвестных частных производных z_i функции $z(x)$ по переменным x^i . В результате несложных вычислений, получим

$$z_i = \alpha_j h_{ij}, \quad (5)$$

где по повторяющимся индексам предполагается суммирование и $h_{ij} = \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x^i \partial x^j}$. Правую часть формулы (5) можно преобразовать

$$\alpha_j h_{ij} = \nabla \nabla h \alpha, \quad (6)$$

где $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}\}$, а $\nabla \nabla h$ — гессиан функции $h(x)$, т.е. справа стоит произведение матрицы на вектор. Из (5) видно, что для существования искомой функции z необходимо, чтобы правая часть (5) была градиентом.

Список литературы

1. Аминов Ю.А. Определение поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве по ее грассманову образу. - Математический сборник, 1982, т. 117, №2, с.147-160.
2. Кизбикенов К.О. Двумерные поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве с данным грассмановым образом. Деп. в ВИНТИ АН СССР, №6568-83 от 5.12.1983 г., 28с.
3. Погорелов А.В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. — М., Наука, 1969, с. 760.

Сведения об авторе

Кизбикенов Кажимурад Оспанович

Адрес: Россия, 656015, Барнаул, пр. Социалистический, 126, БГПУ, каф. геометрии БГПУ

тел: (3852)26—85—53

e-mail: kko@bspu.secna.ru