Многомерная линейная модель распределения ресурсов

В.Р. Карымов, М.В. Славская

1. Введение

Динамическое программирование (ДП) связано с многошаговыми процессами принятия решения. Впервые данный термин был введен Беллманом в его известной монографии [1], в этой работе на основе рассмотрения функциональных уравнений были заложены математические основы ДП. В работах [2], [3], [6], [5], [4], [7], [10] изучены многочисленные примеры задач ДП допускающих явное решение.

Отметим, что в основном рассматривались двумерные задачи, решение которых связано с нахождением экстремума функции одной переменной, и потому иногда допускающих явное решение. Многомерные задачи, как правило, явного решения не имеют и решаются численно.

В данной работе построено явное решение для многомерной линейной задачи распределения ресурсов, указана простая геометрическая трактовка этого решения, которая позволяет полностью исследовать данную задачу.

Напомним классическую формулировку задачи распределения ресурсов между m предприятиями.

Задача. Планируется деятельность m предприятий в течение n лет. Начальные средства составляют ξ_0. Средства X, вложенные в i-ое предприятие, приносят к концу года доход $f_i(X)$ и возвращаются в размере $\varphi_i(X) < X$; $i = 1, 2, \ldots, m$. По истечении года все оставшиеся средства заново перераспределяются между предприятиями, новых средств не поступает и доход в производство не вкладывается. Требуется найти оптимальный способ распределения имеющихся средств.

Процесс распределения ресурсов рассматривается как n-шаговый, в котором номер шага соответствует номеру года. Управляемая система в данном случае это m предприятий с вложенными в них средствами. Система характеризуется одним параметром состояния ξ_{k-1} $k = 1, \ldots, n$ — количеством средств, которые следует перераспределить в начале k-го года. Переменных управления на каждом шаге m: x_{ki} — количество средств, выделенных соответственно i-ому предприятию. Так как средства ежегодно перераспределяются полностью то

$$x_{k1} + x_{k2} + \ldots + x_{km} = \xi_{k-1}.$$

Показатель эффективности задачи — доход, полученный от m предприятий в течение n лет — составляет:

$$Z = \sum_{k=1}^{n} [f_1(x_{k1}) + f_2(x_{k2}) + \ldots + f_m(x_{km})]$$

Уравнение состояния выражает остаток средств ξ_k после k-го шага и имеет вид:

$$\xi_k = \varphi_1(x_{k1}) + \varphi_2(x_{k2}) + \ldots + \varphi_m(x_{km})$$

Пусть $Z_k^*(\xi_{k-1})$ — условный оптимальный доход, полученный от распределения средств ξ_{k-1} между m предприятиями в период с k-го года до последнего n-го. Запишем рекуррентные соотношения для этих функций:

$$Z_n^*(\xi_{n-1}) = \max_{x_{n1}+x_{n2}+\ldots+x_{nm}=\xi_{n-1}} [f_1(x_{n1}) + f_2(x_{n2}) + \ldots + f_m(x_{nm})]$$

- последнее уравнение Беллмана (при $k = n$), и

$$Z_k^*(\xi_{k-1}) = \max_{x_{k1}+x_{k2}+\ldots+x_{km}=\xi_{k-1}} \left[f_1(x_{k1}) + f_2(x_{k2}) + \ldots + f_m(x_{km}) + Z_{k+1}^*(\xi_k)\right]$$

уравнения Беллмана при $k = n-1, n-2, \ldots, 1$, здесь $\xi_k = \varphi_1(x_{k1}) + \varphi_2(x_{k2}) + \ldots + \varphi_m(x_{km})$. Как видно из этих уравнений, даже для функций f_i, φ_i простого вида, рассчитывать на получение явного решения затруднительно. Большинство известных явных решений для двумерной задачи приведено в [1].

2. Многомерная линейная модель распределения ресурсов.

Теорема 1. *Пусть функции $f_i(X)$ и $\varphi_i(X)$, линейные $f_i(X) = h_i X, \varphi_i(X) = r_i X; h_i > 0, 0 < r_i < 1, i = 1, 2, \ldots, m$. Тогда функции условного оптимального дохода $Z_k^*(\xi_{k-1})$ также будут линейные $Z_k^*(\xi_{k-1}) = H_k \xi_{k-1}$, при этом коэффициенты H_k находятся рекуррентно;*

$$\begin{aligned} H_n &= \lambda(0), \\ H_{n-1} &= \lambda(H_n), \\ &\cdots \\ H_1 &= \lambda(H_2), \end{aligned}$$

где функция $\lambda(x) = \max\limits_{1\le i\le m} [h_i + r_i x]$ *— верхняя огибающая линейных функций.*

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по k. Для $k = n$ имеем

$$\begin{aligned} Z_n^*(\xi_{n-1}) &= \max_{x_{n1}+x_{n2}+\ldots+x_{nm}=\xi_{n-1}} [f_1(x_{n1}) + f_2(x_{n2}) + \ldots + f_m(x_{nm})] = \\ &= \max_{x_{n1}+x_{n2}+\ldots+x_{nm}=\xi_{n-1}} [h_1 \cdot x_{n1} + h_2 \cdot x_{n2} + \ldots + h_m \cdot x_{nm}] = \\ &= \max_i [h_i] \cdot \xi_{n-1} = H_n \cdot \xi_{n-1}, \end{aligned}$$

где $H_n = \lambda(0)$. Докажем индуктивный переход

$$Z_k^*(\xi_{k-1}) = \max_{x_{k1}+\ldots+x_{km}=\xi_{k-1}} \left[f_1(x_{k1}) + \ldots + f_m(x_{km}) + Z_{k+1}^*(\xi_k)\right] =$$
$$= \max_{x_{k1}+\ldots+x_{km}=\xi_{k-1}} [h_1 \cdot x_{k1} + \ldots + h_m \cdot x_{km} + H_{k+1}\xi_k] =$$
$$= \max_{x_{k1}+x_{k2}+\ldots+x_{km}=\xi_{k-1}} [h_1 \cdot x_{k1} + \ldots + h_m \cdot x_{km} + H_{k+1}(r_1 x_{k1} + \ldots + r_m x_{km})] =$$
$$= \max_{x_{k1}+x_{k2}+\ldots+x_{km}=\xi_{k-1}} [(h_1 + H_{k+1} r_1) \cdot x_{k1} + \ldots + (h_m + H_{k+1} r_m) \cdot x_{km}] =$$
$$= \max_i [h_i + H_{k+1} r_i] \cdot \xi_{k-1} = H_k \xi_{k-1},$$

что и требовалось доказать. □

Замечание 1. *Многомерная линейная модель распределения может быть обобщена на случай, когда параметры предприятий меняются с течением времени. В этом случае функция* λ_k *будет зависеть от года* k. *Коэффициенты* H_k *выражаются через эти функции по формулам* $H_n = \lambda_n(0)$, $H_{n-1} = \lambda_{n-1}(\lambda_n(0))$, *и.т.д.*

Теорема 2. *Функция* $\lambda(x) = \max_i [h_i + r_i x]$ *— кусочно-линейная выпуклая вниз функция, ее производные (левая и правая) удовлетворяют неравенствам*

$$\min_i r_i \le \lambda_l'(x) \le \lambda_r'(x) \le \max_i r_i$$

Коэффициенты H_k *можно легко выразить через эту функцию. Соответствующее геометрическое построение изображено на рис. 1.*

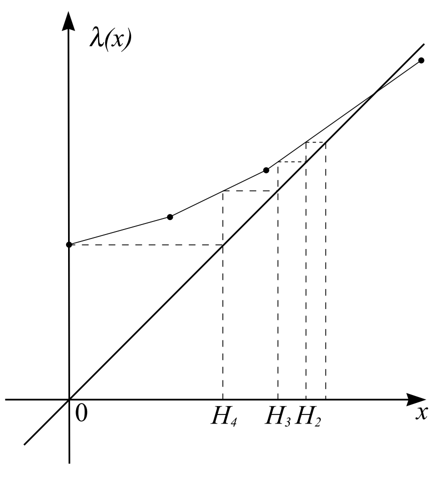

Рис. 1:

Замечание 2. *Из рисунка видно, что в данном случае в работе по оптимальному плану будут участвовать только три предприятия. Остальные предприятия, для которых выполняется строгое неравенство*

$$\lambda(x) > h_i + r_i x, \quad \forall x$$

привлекать к работе нецелесообразно. На первых этапах оптимального плана будут работать наиболее ресурсосберегающие предприятия. Лишь на последних этапах будет участвовать предприятие приносящие наиболее высокий доход. Окончательный доход, полученный от m предприятий в течение n лет — составляет

$$Z_1^*(\xi_0) = H_1\xi_0.$$

Основываясь на полученной геометрической интерпретации решения введем следующее определение:

Определение 1. *Коэффициентом эффективности i-ого предприятия назовем решение уравнения $x = h_i + r_i x$, т. е. число*

$$P_i = \frac{h_i}{1 - r_i}$$

Из геометрических соображений очевидно утверждение:

Теорема 3. *Для многомерной линейной модели распределения ресурсов справедливы утверждения;*

$$\begin{aligned} \max_i h_i &\leq H_1 \leq \max_i P_i, \\ \lim_{n\to\infty} H_1 &= \max_i P_i \end{aligned}$$

Алгоритм построения функции $\lambda(x)$ следующий; сначала находится прямая $h_{i_0} + r_{i_0}x$ для которой коэффициент P_{i_0} — максимальный, затем из оставшихся ищется прямая $h_{i_1} + r_{i_1}x$ для которой максимально решение уравнения $h_{i_1} + r_{i_1}x = h_{i_0} + r_{i_0}x$, далее из оставшихся прямых ищется прямая $h_{i_2} + r_{i_2}x$ для которой максимально решение уравнения $h_{i_2} + r_{i_2}x = h_{i_1} + r_{i_1}x$ и.т.д. Данный алгоритм решения реализован в системе Matlab [8], [9].

Замечание 3. *Отметим, что простота и наглядность решения многомерной линейной задачи распределения ресурсов позволяет использовать ее в учебном процессе, при изложении ДП на практикуме по курсу "Исследование операций" на математическом факультете АГУ.*

Список литературы

1. Беллман Р. *Динамическое программирование* Изд-во ИЛ, Москва, 1960.
2. Вагнер Г. *Основы исследования операций* М.: Мир, 1973.
3. *Исследование операций:* В 2-х томах. Пер. с англ. Под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. — М.: Мир, 1981.
4. Карымов В.Р. *Решение задач нахождения кратчайшего пути и оптимального распределения ресурсов методом динамического программирования* Методические указания для студентов III курса экономического факультета, 1984.
5. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М. *Исследование операций в экономике*, ЮНИТИ, 1997
6. Вентцель Е.С. *Исследование операций.*- М:Советское радио, 1972. -512с.
7. Оскорбин Н.М., Суханов В.А. *Исследование операций и теотия игр в элементарном изложении; Текст лекций.* — Барнаул: изд. Алт. Ун-та, 1987. — 62 с.
8. Потемкин В.Г. *MATLAB справочное пособие*, ДИАЛОГ-МИФИ, 1997.
9. Документация "MATLAB Optimization Toolbox, v.5.", 1997.
10. Калихман И.Л., Войтенко М.А. *Динамическое программирование в примерах и задачах.* М.: Высшая школа, 1979.

Сведения об авторах

Карымов Владимир Рабхатович

Адрес: Россия, 656099, Барнаул, ул. Димитрова, 66, АГУ

тел: (3852)36—70—18

e-mail: vladicar@math.dcn-asu.ru

Славская Мария Викторовна

Адрес: Россия, 656099, Барнаул, ул. Димитрова, 66, АГУ

тел: (3852)36—70—18

e-mail: slav@math.dcn-asu.ru