Стационарная деформация жидкости Максвелла– Олдройда

А.Г. Гроссман

Модель однородной вязкоупругой жидкости Максвелла - Олдройда описывается реологическим уравнением Максвелла с верхними конвективными производными, которое в декартовой прямоугольной системе координат можно представить в следующей форме:

$$d\Pi/dt = G\Pi + \Pi G^T - \beta\Pi + \mu(G + G^T), \tag{1}$$

где Π - матрица компонент тензора дополнительных напряжений, t - время, G - матрица компонент тензора скоростей деформаций, β - постоянная, обратная максвелловскому времени релаксации, μ - постоянная, обычно называемая модулем сдвига. Здесь и далее G^T означает транспонирование матрицы G, а d/dt - оператор субстанциональной производной. В силу несжимаемости жидкости Максвелла - Олдройда след матрицы G равен нулю. Ниже предполагается, что в рассматриваемой жидкой частице скорость деформаций остается постоянной, то есть $G = const$.

Реологическое уравнение состояния (1) представляет собой одну из простейших математических моделей жидкостей с памятью и играет в теории вязкоупругости роль, аналогичную роли модели идеального газа в газовой динамике. Она широко используется как в теоретических исследованиях, так и для решения практических задач. В связи с этим в работе изучается структура общего решения уравнения Максвелла с верхними конвективными производными (1) для случая $G = const$. Отметим, что в силу специфики уравнения Максвелла этому условию отвечает как стационарная деформация только рассматриваемой жидкой частицы, так и однородная стационарная деформация жидкости в целом.

В работе предложен метод отыскания общего решения уравнения Максвелла (1) для общего случая трехмерной стационарной деформации жидкой частицы в явном виде, а для случая двумерной стационарной деформации приведено найденное этим методом выражение для установившегося решения этого уравнения. Указаны общие условия устойчивости дополнительных напряжений в жидкой частице при ее стационарной деформации.

Для вывода общего решения уравнения (1) его с помощью преобразований

$$\Xi = \Pi + \mu E, \tag{2}$$

$$A = G - 1/2\beta E, \tag{3}$$

где E - единичная матрица, можно преобразовать к виду:

$$d\Xi/dt = A\Xi + \Xi A^T + \mu\beta E. \tag{4}$$

Соответствующее (4) однородное матричное дифференциальное уравнение относится к хорошо известному типу линейных дифференциальных матричных уравнений с постоянными матричными коэффициентами (см., например, [1]). Соответствующее (4) однородное матричное уравнение имеет общее решение вида

$$\Xi_1(t) = \exp(At)C\exp(A^Tt), \tag{5}$$

где C - произвольная вещественная симметричная матрица. Используя метод вариации произвольных постоянных, из общего решения (5) можно получить следующее частное решение уравнения (4):

$$\Xi_2(t) = \mu\beta\int_0^t \exp(As)\exp(A^Ts)ds. \tag{6}$$

Общее решение уравнения (4) представляется суммой решений (5) и (6)

$$\Xi = \Xi_1(t) + \Xi_2(t). \tag{7}$$

Если вещественные части всех собственных значений матрицы A отрицательны, то $\Xi_1(t) \to 0$ при $t \to \infty$, а интеграл в правой части равенства (6) при бесконечном верхнем пределе сходится к некоторой конечной матрице Ξ_∞. В силу равенства (7) в этом случае все решения уравнения (5) асимптотически устойчивы, ограничены и с течением времени стремятся к устойчивому стационарному решению - матрице Ξ_∞, определяемой равенством

$$\Xi_\infty = \mu\beta\int_0^\infty \exp(As)\exp(A^Ts)ds. \tag{8}$$

Поскольку выписать в явной форме выражение для экспоненты от практически произвольной квадратной матрицы третьего порядка затруднительно, то общее (6) и стационарное (8) решения в случае трехмерных в общем случае в явной форме выписать не удается. Но для каждой конкретной матрицы A эта задача обычно решается без особого труда, например, путем использования жордановой формы матрицы. Однако в случае двумерных течений выражение для матричной экспоненты удается выписать в явной форме. Действительно, в этом случае из теоремы Гамильтона - Кэли и несжимаемости жидкости вытекает, что

$$G^2 = -\det G \cdot E,$$

где $\det G$ - определитель матрицы G. Благодаря этому соотношению непосредственно из определения экспоненты от матрицы можно легко вывести следующее равенство:

$$\exp(At) = \exp(-1/2\beta t)[f_0(\lambda t)E + f_1(\lambda t)/\lambda G]. \tag{9}$$

Функции $f_0(s), f_1(s)$ и параметр λ в правой части этого равенства определяются в зависимости от знака определителя матрицы G по следующему правилу:

$$f_0(s) = ch(s), f_1(s) = sh(s), \lambda = (-\det G)^{1/2} \text{ при } \det G < 0;$$
$$f_0(s) = 1, f_1(s) = s, \lambda = 1 \text{ при } \det G = 0;$$
$$f_0(s) = \cos(s), f_1(s) = \sin(s), \lambda = \det G^{1/2} \text{ при } \det G > 0.$$

Поскольку в этом случае числа $\pm(-\det G)^{1/2}$ являются двумя собственными значениями матрицы G, то числа $-1/2\beta \pm (-\det G)^{1/2}$ равны двум собственными значениями матрицы A. Таким образом, отрицательность вещественных частей всех собственных значений матрицы A в рассматриваемом случае обеспечивается при выполнении условия

$$(1/2\beta)^2 + \det G > 0. \tag{10}$$

Как видно из равенств (5) - (8) и представления (9) для матричной экспоненты, нарушение этого условия приводит к неустойчивости всех решений уравнения (4). В случае

$$(1/2\beta)^2 < -\det G \tag{11}$$

эта неустойчивость имеет экспоненциальный характер - почти все частные решения уравнения (4) и соответствующего ему однородного уравнения будут содержать экспоненциально возрастающие по абсолютной величине компоненты с показателем роста α, равным положительному собственному значению матрицы A :

$$\alpha = (-\det G)^{1/2} - 1/2\beta. \tag{12}$$

В силу равенств (2), (3) для реологического уравнения состояния Максвелла (1) отсюда вытекают следующие результаты.

1. Общее решение реологического уравнения состояния Максвелла с верхними конвективными производными (1) может быть представлено в виде:

$$\Pi(t) = \exp(-\beta t)\exp(Gt)C\exp(G^T t) + +\mu[\int_0^t \exp(-\beta s)\exp(Gs)\exp(G^T s)ds - E], \tag{13}$$

где C - произвольная вещественная симметричная матрица.

2. Если вещественные части всех собственных значений матрицы G тензора градиентов скоростей меньше $\beta/2$, то все решения уравнения (1) асимптотически устойчивы, ограничены и с течением времени стремятся к устойчивому стационарному решению - матрице Π_∞, определяемой равенством

$$\Pi_\infty = \mu[\beta \int_0^\infty \exp(-\beta s)\exp(Gs)\exp(G^T s)ds - E]. \tag{14}$$

3. В двумерном случае имеют место следующие результаты:

- асимптотическая устойчивость и ограниченность всех решений уравнения (1) обеспечивается выполнением неравенства (10);

- матричные экспоненты в (13) и (14) могут быть вычислены с помощью формулы (9);

- опуская громоздкое явное выражение для общего решения уравнения Максвелла (1) приведем лишь полученное таким образом явное выражение для устойчивого стационарного решения:

$$\Pi_\infty = 2\mu\beta/(\beta^2 + 4\det G)[1/2(G + G^T) + 1/\beta(GG^T - \det G \cdot E)]; \tag{15}$$

- при нарушении неравенства (10) все частные решения уравнения Максвелла с верхними конвективными производными неустойчивы и при выполнении неравенства (11) матричные нормы почти всех этих частных решений экспоненциально возрастают с показателем роста (по терминологии операционного исчисления) (12).

Приведенные выше результаты о неустойчивости течения вязкоупругих жидкостей качественно объясняют возникновение эластической турбулентности в медленных течениях вязкоупругих жидкостей и возникновение особой инерциально - упругой турбулентности (см., например, обзор [2]) в турбулентных течениях сильно разбавленных растворов полимеров в ньютоновских жидкостях при очень высоких числах Рейнольдса.

Список литературы

1. Беллман Р. *Введение в теорию матриц.* — М.: "Наука". Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969.
2. Ламли Дж. Л. *Двухфазные и неньютоновские течения. В сб.: Турбулентность. Под ред. П. Бредшоу.* — М.: Машиностроение, 1980.

Сведения об авторе

Гроссман Александр Григорьевич

Адрес: Россия, 656099, Барнаул, пр.Ленина, 46, АлтГТУ, каф. прикладной математики

тел: (3852)36–75–83

e-mail: gross@agtu.secna.ru