О введении понятия "кривизна кривой" в курсе математики для технических специальностей АлтГТУ

Е.М. Гельфанд, Г.В. Пышнограй

В настоящее время наблюдается тенденция к уменьшению количества часов, выделяемых учебными планами на математику. Это приводит к сокращению числа изучаемых тем и к уменьшению вопросов, рассматриваемых в рамках каждой темы. Поэтому часто тема "кривизна кривой"исключается из курсов математики для специальностей, не требующих углубленного знания предмета. Это связано с тем, что сложившиеся к настоящему времени изложение этой темы требует введения и пояснения таких понятий как угол смежности, длина дуги кривой [1]. Последнее понятие более подробно исследуется при изучении темы "применение определенного интеграла". Вместе с тем, возможно другое определение кривизны, не требующее исследования этих понятий. Покажем это.

Определение 1. *Назовем кривизной окружности радиуса R величину*

$$K = \frac{1}{R}.$$

Определение 2. *Кривизной K кривой $y = f(x)$ в точке x_0 назовем кривизну касательной в этой точке окружности, проведенной так, чтобы вторая производная $f^{''}(x_0)$ совпадала со второй производной в точке x_0, вычисленной по окружности.*

Выведем формулу для нахождения K. Запишем

$$(y_1 - y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}(x_1 - x_0) - \text{уравнение нормали},$$

где x_1, y_1 - координаты центра любой окружности, касательной к $y = f(x)$.

Т.к. $M(x_0, y_0)$ лежит на окружности, то

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = R^2$$

Выведем отсюда вторую производную

$$2(x - x_1) + 2(y - y_1)f^{'}_{circ}(x) = 0,$$

где индекс $circ$ означает, что точка находится на касательной окружности. Кроме того

$$f^{'}_{circ}(x) = -\frac{(x - x_1)}{(y - y_1)}.$$

Отсюда после дифференцирования в т. (x_0, y_0) получим

$$f^{''}_{circ}(x) = -\frac{(y - y_1) - (x - x_1)f^{'}_{circ}(x)}{(y - y_1)^2}$$

После чего получим

$$1 + f^{'}(x_0) + (y_0 - y_1)f^{''}(x_0) = 0$$

$$R^2 = (f^{'}(x_0))^2(y_1 - y_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 =$$

$$= \frac{(1 + (f^{'}(x_0))^2)^3}{(f^{''}(x_0))^2}$$

$$K = \frac{|f^{''}(x_0)|}{(1 + (f^{'}(x_0))^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Важность данной темы можно продемонстрировать на следующем техническом вопросе [1]. Из механики известно, что: 1) точка M, равномерно двигающаяся со скоростью V по какой-нибудь плоской линии L, в каждый момент времени обладает ускорением $W = KV^2$, где K - кривизна линии L в той ее точке, где в рассматриваемый момент находится точка M. Это ускорение (называемое нормальным), направлено по нормали к L от точки M к соответствующему центру кривизны. Если линия L прямая, то $K = 0$ и нормальной ускорение отсутствует.

2) если двигающаяся точка M имеет массу m и в какой-нибудь момент обладает ускорением W, то в этот момент на M действует сила $F = mW$, направленная в ту сторону, что и ускорение W. 3) если какое-либо тело действует на точку M с силой F, то и M действует на упомянутое тело с равной по величине, но противоположно направленной силой.

Отметив это, рассмотрим равномерное (со скоростью V) движение железнодорожного поезда, который мы приближенно примем за материальную точку массы m. Пусть поезд движется сначала по прямой, а затем переходит на закругление, представляющее собой дугу окружности радиуса R. Разумеется, прямая является касательной к этой дуге. Это обстоятельство, однако, не обеспечивает плавность движения. В самом деле, на прямом участке кривизна пути равна нулю, а на дуге она равна K, пока поезд шел по прямой, он не имел ускорения, а при проходе через стык он мгновенно приобрел ускорение $W = KV^2$. Отсюда следует, что в момент перехода поезда через стык на поезд мгновенно начинает действовать сила $F = mW$.

Такое мгновенное возникновение силы называется явлением удара. Итак, в момент прохода поезда через стык поезд получает со стороны рельсов удар, а значит и сам наносит по рельсам такой же удар. Поскольку и масса m поезда и его скорость V обычно весьма велики, то описанное явление портит полотно и даже может вызвать крушение поезда. Для избежания указанных неприятностей не применяют непосредственного соединения прямолинейного и кругового участков пути, а вставляют между ними некоторую "переходную кривую". Эту линию выбирают так, чтобы ее кривизна K непрерывно возрастала от значения $K = 0$, до значения $K = K_0$. Этим будет достигнута плавность движения поезда. Так как точка должна быть точкой выпрямления линии L, то в качестве переходной кривой может быть выбрана не любая линия, а только такая, на которой имеются точки выпрямления. Например, обычная парабола $y = ax^2$ для этой цели не годится, так как здесь $y'' = 2a$ и точек выпрямления нет. Напротив, кубическая парабола $y = ax^3$ имеет точку выпрямления $x = 0$, и поэтому ее и в действительности используют в качестве переходной кривой.

Список литературы

1. *Натансон И.П. Краткий курс высшей математики* Л.:Физматгиз, 1963, 748 с.

Сведения об авторах

Гельфанд Елена Михайловна

Адрес: Россия, 656099, Барнаул, пр. Ленина, 46, АлтГТУ, каф. высшей математики

тел: (3852)36–85–16

Пышнограй Григорий Владимирович

Адрес: Россия, 656099, Барнаул, пр. Ленина, 46, АлтГТУ, каф. высшей математики

тел: (3852)36–85–16

e-mail: pgv@agtu.secna.ru