

Об алгоритме поиска решений систем нелинейных уравнений

Е.В. Фирсов, Ю.Г. Никоноров

Часто возникает необходимость поиска всех решений систем нелинейных уравнений. Насколько известно авторам на сегодняшний день не существует эффективного алгоритма поиска всех решений систем нелинейных уравнений. Авторами разработан достаточно эффективный алгоритм, в этой статье дается его описание.

Существует огромное количество методов решения систем уравнений. Все они делятся на две группы: методы итеративного приближения к решению и методы перебора. В первой группе относятся такие методы как метод Ньютона, метод секущих, Зейделя, Последовательных приближений и т.д. Эти методы позволяют отыскать только одно решение системы уравнений. Суть всех этих методов состоит в выборе начального приближения и последующем итеративном приближении к решению. Предлагаемый метод относится ко второй группе. С одной стороны он позволяет достаточно эффективно отбрасывать области в которых решение отсутствует, а с другой стороны этот метод не "упустит" ни одного решения.

Рассмотрим алгоритм поиска решений систем уравнений. Дана система уравнений

$$\begin{cases} g_1(x) = 0 \\ g_2(x) = 0 \\ \dots \\ g_n(x) = 0 \end{cases},$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, g_i - гладкие (класса C^1) функции.

Поиск решений будем осуществлять на заданном компактном множестве D вида

$$D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

Далее мы используем обозначение $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

Сформулируем необходимое условие наличия решения на множестве. Пусть M_i оценка сверху нормы градиента функции $g_i(x)$ т.е. $M_i \geq \|\nabla g_i(x)\|$ на множестве D , тогда необходимое условие наличия решения системы уравнений на заданном множестве D запишется так:

$$|g_i(x)| < M_i \cdot \text{diam}(D) \text{ для всех } i, x$$

Пусть существует i и существует x для которых выполняется $|g_i(x)| > M_i \cdot \text{diam}(D)$, тогда в заданном множестве D решений исходной системы нет.

Первоначальное множество D разбивается на два подмножества D_1 и D_2

$$D = D_1 \cup D_2,$$

где $\text{diam}(D_1) < \alpha \cdot \text{diam}(D)$, $\text{diam}(D_2) < \alpha \cdot \text{diam}(D)$, $\alpha < 1$

$$\text{diam}(D) = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2}, \text{ где } d_i = |a_i - b_i| \text{ для всех } i$$

Предлагается следующий способ деления множества D :

$$\begin{aligned} D_1 &= [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times \left[a_i, \frac{a_i + b_i}{2} \right] \times \dots \times [a_n, b_n], \\ D_2 &= [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times \left[\frac{a_i + b_i}{2}, b_i \right] \times \dots \times [a_n, b_n], \end{aligned}$$

где i выбирается из условия $|b_i - a_i| \geq |b_j - a_j|$ для всех $j \neq i$

$$\text{diam}(D_1) = \text{diam}(D_2) = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + \dots + \left(\frac{d_i}{2}\right)^2 + \dots + d_n^2}$$

Для этого способа деления множества $\alpha = \sqrt{1 - \frac{3}{4 \cdot n}}$

В подмножествах D_1 , D_2 проверяется условие наличия решения на данном подмножестве.

В случае если условие не выполняется, подмножество откидывается из дальнейшего рассмотрения.

Если условие выполняется, происходит разбиение рассматриваемого подмножества на два меньших по диаметру и процесс повторяется.

Как только диаметр подмножества становится меньше заданной точности ε , считается, что решение находится в данном подмножестве. Т.к. любая точка данного подмножества находится в пределах заданной точности, то за решение принимается, например, центр данного подмножества.

Задача поиска всех решений систем уравнений встала перед авторами в области теории однородных эйнштейновых многообразий. Алгоритм рассмотрим на примере поиска Эйнштейновых метрик на обобщенных симметрических пространствах.

В общем случае система уравнений Эйнштейна для обобщенных симметрических пространств выглядит следующим образом [1]:

$$\begin{cases} y_1 \cdot (\alpha_2 \cdot y_3 + \alpha_3 \cdot y_2 - 2 \cdot y_1) = 2 \cdot (\alpha_2 + \alpha_3) \\ y_2 \cdot (\alpha_3 \cdot y_1 + \alpha_1 \cdot y_3 - 2 \cdot y_2) = 2 \cdot (\alpha_1 + \alpha_3) \\ y_3 \cdot (\alpha_1 \cdot y_2 + \alpha_2 \cdot y_1 - 2 \cdot y_3) = 2 \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) \end{cases},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - некоторые положительные константы.

Приведем выражение для констант $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ в случае ортогональных и симплектических групп:

В случае ортогональных групп имеем вложение

$$SO(n_1) \times SO(n_2) \times SO(n_3) \subset SO(n_1 + n_2 + n_3)$$

и следующие соотношения

$$n_1 + n_2 + n_3 = n, \quad n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq 1,$$

$$\alpha_1 = 2 \cdot \frac{n_1 + n_2 + n_3 - 2}{n_3}, \quad \alpha_2 = 2 \cdot \frac{n_1 + n_2 + n_3 - 2}{n_2}, \quad \alpha_3 = 2 \cdot \frac{n_1 + n_2 + n_3 - 2}{n_1}$$

В случае симплектических групп имеем вложение

$$Sp(n_1) \times Sp(n_2) \times Sp(n_3) \subset Sp(n_1 + n_2 + n_3)$$

и следующие соотношения

$$n_1 + n_2 + n_3 = n, \quad n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq 1,$$

$$\alpha_1 = 2 \cdot \frac{n_1 + n_2 + n_3 + 1}{n_3}, \quad \alpha_2 = 2 \cdot \frac{n_1 + n_2 + n_3 + 1}{n_2}, \quad \alpha_3 = 2 \cdot \frac{n_1 + n_2 + n_3 + 1}{n_1}$$

В результате работы программы была получена серия решений систем уравнений Эйнштейна для обобщенных симметрических пространств.

Примеры решений систем уравнений Эйнштейна в случае ортогональных групп представлены в таблице 1

Таблица 1

$n_1=1 \ n_2=1 \ n_3=1$	(2, 2, 2)
$n_1=2 \ n_2=1 \ n_3=1$	(1.5, 2, 1.5)
$n_1=2 \ n_2=2 \ n_3=1$	(2.190, 2.314, 0.972) (2.190, 0.972, 2.314)
$n_1=3 \ n_2=2 \ n_3=1$	(2.628, 0.787, 2.692) (1.654, 2.087, 1.131)
$n_1=3 \ n_2=3 \ n_3=3$	(1.595, 1.595, 1.595) (1.932, 1.449, 1.449) (1.449, 1.932, 1.449) (1.449, 1.449, 1.932)
$n_1=5 \ n_2=4 \ n_3=4$	(1.691, 1.389, 1.691) (2.054, 1.294, 1.505) (1.322, 2.145, 1.322) (1.505, 1.294, 2.054)
$n_1=5 \ n_2=5 \ n_3=4$	(1.918, 1.442, 1.442) (1.420, 2.156, 1.252) (1.420, 1.252, 2.156)

Примеры решений систем уравнений Эйнштейна в случае симплектических групп представлены в таблице 2

Таблица 2

$n_1=1 \ n_2=1 \ n_3=1$	(3.098, 1.032, 1.032) (1.032, 3.098, 1.032) (1.032, 1.032, 3.098) (1.511, 1.511, 1.511)
$n_1=2 \ n_2=1 \ n_3=1$	(3.242, 0.912, 1.321) (1.321, 0.912, 3.242) (1.663, 1.305, 1.663) (1.026, 2.615, 1.026)
$n_1=5 \ n_2=4 \ n_3=1$	(3.349, 1.175, 1.397) (1.986, 1.311, 1.528) (1.328, 2.468, 0.904) (1.484, 0.851, 2.640)
$n_1=5 \ n_2=5 \ n_3=1$	(3.336, 1.294, 1.294) (2.010, 1.413, 1.413) (1.420, 2.534, 0.874) (1.420, 0.874, 2.534)
$n_1=2 \ n_2=2 \ n_3=2$	(2.788, 1.115, 1.115) (1.115, 2.788, 1.115) (1.115, 1.115, 2.788) (1.527, 1.527, 1.527)
$n_1=4 \ n_2=3 \ n_3=2$	(2.936, 1.096, 1.301) (1.342, 0.977, 2.709) (1.741, 1.356, 1.567) (1.193, 2.515, 1.032)
$n_1=5 \ n_2=5 \ n_3=2$	(2.997, 1.243, 1.243) (1.865, 1.430, 1.430) (1.343, 2.537, 0.956)

Программная реализация описанного выше алгоритма выполнена в рамках дипломного проекта Фирсова Е.В. для IBM AT совместимых компьютеров в операционной среде MS Windows. С помощью реализованной программы получены новые результаты в области теории однородных эйнштейновых многообразий.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 01-01-06224, 00-15-96165, 99-01-00543).

Список литературы

1. Ю.Г. Никоноров Об одном классе однородных компактных многообразий. // Сиб. мат. журнал.-2000.- Т.41, №1, С.200-205.

Сведения об авторах

Фирсов Евгений Валерьевич

Адрес: Россия, 658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6, РИИ АлтГТУ

тел: (38557)3-87-86

e-mail: firs@inst.rubtsovsk.ru

Никоноров Юрий Геннадьевич

Адрес: Россия, 658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6, РИИ АлтГТУ

тел: (38557)3-87-86

e-mail: nik@inst.rubtsovsk.ru