Эволютные n-поверхности в E^{2n}

М.А. Чешкова

В евклидовом пространстве E^{2n} рассматриваются две гладкие n - поверхности M, $\bar{M}$ и диффеоморфизм $f : M \to \bar{M}$. Исследуется случай, когда поверхность $\bar{M}$ — эволюта поверхности M, т.е. есть огибающая нормальных n-плоскостей поверхности M. Тогда касательные n-плоскости в соответствующих точках $p \in M$, $f(p) \in \bar{M}$ ортогональны и вектор $p\vec{f(p)} = \tau(p), \quad \tau(p) \in T_p^{\perp}M$ — нормальный вектор поверхности M.

Ранее нами исследовался случай $n = 2$. Было доказано, что [1] если $\bar{M}$ есть эволюта поверхности M, то нормальная связность M и связность Леви-Чивита поверхности $\bar{M}$ плоские, находится угол между вектором средней нормали η и τ, доказывается, что минимальные поверхности не имеют эволют. В настоящей статье эти результаты находят дополнение и естественные обобщения на случай картанова подмногообразия M, у которого слои главного нормального расслоения имеют размерность $n = dimM$, с плоской нормальной связностью.

Теорема 1. *Если M n- мерное картаново подмногообразие M с плоской нормальной связностью, то эволюта $\bar{M}$ существует и имеет локально плоскую связность Леви-Чивита.*

Теорема 2. *Если M n- мерное картаново подмногообразие M с плоской нормальной связностью, $\bar{M}$ — эволюта M, то следующие утверждения еквивалентны:*

1) тензор Риччи подмногообразия M равен нулю,

2) $df\bar{\eta} = -\eta$,

где $\eta, \bar{\eta}$ — векторы средних кривизны $M, \bar{M}$.

Прямым обобщением результатов работы [1] являются следующие теоремы.

Теорема 3. *Минимальные поверхности не имеют эволют.*

Теорема 4. *Косинус угла φ между вектором $\eta(p)$ средней нормали поверхности M и вектором $p\vec{f(p)} = \tau(p)$, соединяющим соответствующие точки поверхности M и ее эволюты $\bar{M}$, равен*

$$cos\varphi = \frac{1}{lH},$$

где $l = |\tau(p)|$, H — средняя кривизна поверхности M в точке $p \in M$.

Следствие. *Если орт средней нормали η совпадает с ортом вектора τ, то $l = \frac{1}{H}$.*

1.Основные формулы. Пусть M, $\bar{M}$ — две гладкие n- поверхности в евклидовом пространстве E^{2n}, $f : M \to \bar{M}$ — диффеоморфизм, $F(M)$ — R — алгебра дифференцируемых на M функций, $T_s^q(M)$ — F — модуль дифференцируемых на M тензорных полей типа (q, s), ∂ — дифференцирование в E^{2n}.

Формулы Гаусса-Вейнгартена поверхности M имеют вид ([2], стр. 23)

$$\begin{aligned} \partial_X Y &= \nabla_X Y + \alpha(X, Y), \\ \partial_X \xi &= -A_\xi X + \nabla_X^{\perp}\xi, \end{aligned} \tag{1}$$

где $X, Y \in T_0^1(M), \nabla$ — связность Леви-Чивита метрики

$g(X, Y) =< X, Y >, \alpha$ — вторая фундаментальная форма поверхности M, $\nabla^{\perp}$— нормальная связность, $A_\xi \in T_1^1(M)$ — симметричный оператор , соответствующий полю $\xi \in T^{\perp}M$. Выполняются уравнения Гаусса-Кодацци

$$R(X, Y)Z = A_{\alpha(Y,Z)}X - A_{\alpha(X,Z)}Y, \tag{2}$$

$$< R^{\perp}(X, Y)\xi, \nu >= g([A_\xi, A_\nu]X, Y), X, Y, Z \in TM, \ \xi, \nu \in T^{\perp}M,$$

где $R(X, Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$ — кривизна связности ∇, $< R^{\perp}(X, Y)\xi = \nabla_X^{\perp}\nabla_Y^{\perp}\xi - \nabla_Y^{\perp}\nabla_X^{\perp}\xi - \nabla_{[X,Y]}^{\perp}\xi$ — кривизна нормальной связности $\nabla^{\perp}$, $X, Y, Z, W \in TM, \xi, \in T^{\perp}M$, [,] — коммутатор матриц.

Обозначим через r — радиус - вектор точки $p \in M$, через $\bar{r}$ — радиус - вектор точки $f(p) \in \bar{M}$. Тогда отображение $f : M \to \bar{M}$ запишется в виде

$$\bar{r} = r + \tau, \quad \tau \in T^{\perp}M. \tag{3}$$

Дифференциал отображения f определится из равенства

$$df(X) = df(\partial_X r) = \partial_X \bar{r}, \ \partial_X r = X \in TM.$$

Дифференцируя (3) и используя (1), получим

$$df(X) = X - A_\tau X + \nabla^\perp_X \tau.$$

Так как касательные n-плоскости поверхностей M, $\bar{M}$ в соответствующих точках ортогональны, то касательная составляющая $FX = X - A_\tau X$ вектора $df(X)$ равна нулю. Имеем

$$A_\tau X = X,\ df(X) = \Omega X,\ \Omega X = \nabla^\perp_X \tau. \tag{4}$$

Связность $\bar{\nabla}$ Леви-Чивита метрики $\bar{g}(X,Y) =< dfX, dfY >=< \Omega X, \Omega Y >$ вид [3]

$$\bar{\nabla}_X Y = \Omega^{-1} \nabla^\perp_X \Omega Y, \tag{5}$$

Тензор $\bar{R}$ кривизны связности $\bar{\nabla}$ удовлетворяет [3] равенству

$$\bar{R}(X,Y)Z = \Omega^{-1} R^\perp(X,Y)\Omega Z. \tag{6}$$

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $X_i \in T_pM$, $\xi_i \in T^\perp_p M$ ортобазис. Если нормальная связность $\nabla^\perp$ плоская, то из (2) следует, что матрицы A_i, A_j коммутируют, следовательно, одновременно приводятся к диагональному виду. Положим

$$A_j X_i = k^j_i X_i. \tag{7}$$

Так как M картаново, то векторы кривизны $\alpha(X_i, X_i) = k^j_i \xi_j$ линейно независимые. В этом случае эволюта существует. Действительно, положим $\bar{r} = r + t^j \xi_j$. Потребуем, чтобы $\partial_i \bar{r} = X_i + (X_i t^j)\xi_j + t^j(-A_j X_i + \nabla^\perp_{X_i} \xi_j) \in TM^\perp$. Имеем

$$1 - \sum_j t^j k^j_i = 0. \tag{8}$$

Так как $det k^j_i \neq 0$, то решение существует.

По условию, нормальная связность $\nabla^\perp$ локально плоская. Из (6) имеем

$$\bar{g}(\bar{R}(X,Y)Z, W) =< R^\perp(X,Y)\Omega Z, \Omega W >= 0,$$

т.е. связность $\bar{\nabla}$ — локально плоская.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Если β — вторая фундаментальная форма поверхности $\bar{M}$, то

$$\bar{\alpha}(X,Y) = \beta(\Omega X, \Omega Y) = \partial_X dfY - df\bar{\nabla}_X Y.$$

Имеем [3]

$$\bar{\alpha}(X,Y) = -A_{\Omega X} Y = -A_{\Omega Y} X, \tag{9}$$

Откуда следует, что трилинейная форма

$$\psi(X,Y,Z) =< \bar{\alpha}(X,Y), Z >= - < A_{\Omega X} Y, Z >= - < \alpha(Y,Z), \Omega X > \tag{10}$$

симметричная. Операторы Вейнгартена $\bar{A}_X$ для поверхности $\bar{M}$ определятся из равенства

$$< \bar{A}_X \Omega Y, \Omega Z >=< X, \bar{\alpha}(Y,Z) > . \tag{11}$$

Тогда $< \bar{A}_X \Omega Y, \Omega Z >= - < X, A_{\Omega Z} Y >= - < \alpha(X,Y), \Omega Z >$. Откуда

$$\bar{A}_X \Omega Y = -\alpha(X,Y), \bar{A}_X \Omega Y = \bar{A}_Y \Omega X. \tag{12}$$

Пусть $X_i (i = 1, ..., n)$ — базис T_pM, $\Omega X_i (i = 1, ..., n)$ — базис $T_pM^\perp$, $g_{ij} =< X_i, X_j >$,$\bar{g}_{ij} =< \Omega X_i, \Omega X_j >$. Определим квадратичные формы $h, \bar{h}$ ([4], стр. 206) — аналог третьих квадратичных форм поверхности в E^3. $h(\bar{h})$ — метрика на грассмановом образе поверхности $M(\bar{M})$[5].

$$h(X,Y) = g^{ij} < \alpha(X_i, X), \alpha(X_j, Y) >, \bar{h}(X,Y) = \bar{g}^{ij} < \bar{\alpha}(X_i, X), \bar{\alpha}(X_j, Y) > . \tag{13}$$

где $g_{ij} g^{ij} = \delta^j_i, \bar{g}_{ij} \bar{g}^{ij} = \delta^j_i$. Из [3] имеем

$$\bar{h}(X,Y) = h(X,Y). \tag{14}$$

Если $\eta, \bar{\eta}$ векторы средних кривизн поверхностей $M, \bar{M}$,то для неминимальных поверхностей рассмотрим квадратичные формы $b, \bar{b}$ — аналог вторых квадратичных форм поверхности в E^3 ([4], стр. 207).

$$b(X,Y) =< \alpha(X,Y), \eta >, \ \bar{b}(X,Y) =< \bar{\alpha}(X,Y), \bar{\eta} > . \tag{15}$$

Используя (10), имеем

$$\bar{b}(X,Y) = - < \alpha(X,Y), \Omega\bar{\eta} > . \tag{16}$$

Имеют место формулы ([4], стр. 212, [3])

$$S(X,Y) = nb(X,Y) - h(X,Y), \ \bar{S}(X,Y) = n\bar{b}(X,Y) - \bar{h}(X,Y), \tag{17}$$

где $S, \bar{S}$ — тензоры Риччи связностей $\nabla, \bar{\nabla}$.

Так как связность $\bar{\nabla}$ плоская, то $\bar{S} = 0$, а так как $\bar{h} = h$, имеем

$$S(X,Y) = nb(X,Y) - n\bar{b}(X,Y). \tag{18}$$

Таким образом,

$$S(X,Y) = n < \alpha(X,Y), \eta + \Omega\bar{\eta} > . \tag{19}$$

Так как $\alpha(X_i, X_j) = 0, i \neq j, \alpha(X_i, X_i)$ линейно независимые, то получим, что $S = 0$, тогда и только тогда, когда $\eta = -\Omega\bar{\eta} = -df\bar{\eta}$.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть $\xi_1, \xi_a, a = 2, ...n$ — орты векторов τ, ξ_a. Тогда из (4) имеем

$$A_1 X = \frac{1}{l} X, \ \tau = l\xi_1, \ l = |\tau|.$$

Поле векторов η средней нормали поверхности M примет вид ([2], стр.40)

$$\eta = \frac{1}{n}(traceA_1\xi_1 + \sum_a traceA_a\xi_a) = \frac{1}{n}(\frac{n}{l}\xi_1 + \sum_a traceA_a\xi_a).$$

Откуда замечаем, что η не может быть нулевым.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4 И СЛЕДСТВИЯ. Имеем

$$cos\varphi = \frac{< \xi_1, \eta >}{|\eta|} = \frac{1}{lH},$$

где $H = |\eta|$ — средняя кривизна поверхности M.

В частности, если орт средней нормали η совпадает с ортом вектора τ, то $l = \frac{1}{H}$.

Список литературы

1. *Эволютные поверхности в E^4*// Матер. 1-ой краевой конф. по математике. Барнаул, 1998. С. 17.
2. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* — М.:Наука, 1981, т.2.- 414 с.
3. Чешкова М.А. *К геометрии пары ортогональных n-поверхностей в E_{2n}.* //Сибирский математический журнал, 1995, №1.- С. 228-232.
4. Базылев В.Т. *Геометрия дифференцируемых многообразий.* — М.: Высшая школа, 1989. 224 с.
5. Obata Y. *The Gauss map of immersion of Riemannian manifolds in spaces of constant curvature.* //J.Diff. Geom. 1968.V2, N2. P.217-223.

Сведения об авторе

Чешкова Мира Артемовна

Адрес: Россия, 656099, Барнаул, ул. Димитрова, 66, АГУ

тел: (8-3852)36—70—67

e-mail: cma@math.dcn-asu.ru